

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт сильноточной электроники  
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи



Кожевников Василий Юрьевич

**ТЕОРИЯ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ С  
НЕРАВНОВЕСНЫМИ ПОТОКАМИ ЭЛЕКТРОНОВ В ПЛОТНЫХ  
ГАЗАХ, ПОЛУПРОВОДНИКАХ И ВАКУУМЕ**

01.04.13 - электрофизика, электрофизические установки

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д-р физ.-мат. наук, профессор

Козырев Андрей Владимирович

Томск – 2019

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Быстропротекающие процессы взаимодействия сильных электрических полей и заряженных частиц</b>	<b>17</b>
1.1 Элементарные представления о физической природе “убегания” электронов	18
1.2 Экспериментальные методы исследования и их технические ограничения	25
1.3 Теоретические методы и их недостатки	33
1.4 Выводы	47
<b>2 Теоретические методы и подходы при описании электродинамических процессов и их реализация на модельных задачах</b>	<b>48</b>
2.1 Метод восстановления энергетических спектров пучков убегающих электронов по данным кривых ослабления	49
2.1.1 Общие замечания	49
2.1.2 Понятие некорректно поставленной задачи математической физики	50
2.1.3 Регуляризация решения уравнения Фредгольма первого рода	53
2.1.4 Спектр электронного пучка вакуумного диода	57
2.1.5 Спектр пучка быстрых электронов газового диода	62
2.2 Методы численного решения уравнений макроскопических моделей разряда	68
2.2.1 Метод линий	70
2.2.2 Метод конечных разностей	75
2.2.3 Метод WENO	83
2.2.4 Математическая модель формирования доменов сильного поля в диодах Ганна	90
2.2.5 Численное моделирование автогенераторов Ганна	97
2.3 Методы численного решения уравнения Больцмана	103
2.3.1 Расщепление уравнения Больцмана	105

2.3.2	Методы решения транспортного уравнения (Власова)	107
2.3.3	Учёт столкновений и общая стратегия построения численной схемы решения уравнения Больцмана	110
2.3.4	Апробация численных методов решения кинетического уравнения на тестовых задачах вакуумной электроники	115
2.4	Выводы	123
<b>3</b>	<b>Детерминистические модели объёмных газовых разрядов высокого давления</b>	<b>126</b>
3.1	Модели планарных газовых разрядов	127
3.2	Модели одномерно-осесимметричных газовых разрядов	137
3.3	Выводы	148
<b>4</b>	<b>Гибридное моделирование быстрых разрядов с убегающими электронами</b>	<b>150</b>
4.1	Основные теоретические положения гибридного моделирования	150
4.2	Планарный газовый диод	153
4.3	Коаксиальный газовый диод	158
4.4	Выводы	172
<b>5</b>	<b>Кинетическое моделирование быстрых разрядов с убегающими электронами</b>	<b>174</b>
5.1	Основные теоретические положения кинетического моделирования	176
5.2	Формулировка интегралов упругих и неупругих столкновений	178
5.3	Кинетическая теория быстрого разряда в коаксиальном диоде	181
5.4	О физической природе убегающих электронов, имеющих “аномальные” энергии	195
5.5	Выводы	199
	<b>Заключение</b>	<b>201</b>
	<b>Литература</b>	<b>204</b>

# Введение

## Актуальность темы и степень её разработанности

Фундаментальный интерес к теоретическому и экспериментальному исследованию взаимодействия сильных электрических полей с потоками электронов в газах, полупроводниках и вакууме зародился ещё в начале 20-го века. Этот интерес был обусловлен рядом исследований в области физики плазмы, классической электродинамики, теории конденсированного состояния и электрофизики. Для исследуемых взаимодействий частиц и полей характерны процессы быстрой трансформации энергии и существенно неравновесные нестационарные состояния ансамблей взаимодействующих частиц (электронов, позитронов, ионов). Рассматриваемые процессы имеют разнообразные проявления, различные по своим масштабам и особенностям протекания, но всем им свойственны общие физические механизмы. Этот факт позволяет исследовать их пользуясь единым фундаментальным подходом, применяя его в качестве универсального инструмента.

Интерес к особенностям неравновесного распределения электронов, приводящих их в режим непрерывного ускорения (убегания) в условиях первоначально столкновительного движения в газовых средах зародился ещё в 1925 году, когда Уилсон высказал предположение [1] о возможности генерации электронов высоких энергий в атмосфере Земли. В качестве одного из выводов работы [1] утверждалось, что многие бета-лучи, возникающие в электрических полях над грозowymi облаками, могут иметь очень протяжённые треки. Лишь спустя 41 год с момента публикации [1] при лабораторном исследовании искрового разряда [2] были получены первые экспериментальные подтверждения высказанного ранее предположения. В работе [2] было впервые зарегистрировано рентгеновское излучение при пробое газового промежутка в среде гелия. Конструкция газоразрядного промежутка представляла собой конфигурацию электродов с малым радиусом кривизны, что позволяет формировать сильно неоднородное электростатическое поле. Авторы [2] высказали своё недоумение относительно того, как рентгеновское излучение могло быть получено при относительно малых для генерации

тормозного излучения значениях напряжения, приложенного к промежутку в исследуемых условиях. Позднее, в работе [3] явление генерации рентгеновского излучения было зарегистрировано в импульсном разряде в воздухе при нормальных условиях как при положительной, так и при отрицательной полярности прикладываемого импульса напряжения.

Интенсивное изучение рентгеновского излучения разрядов без наличия дополнительных источников внешней объёмной предыонизации было продолжено в конце 1960-х годов [4,5]. Наличие рентгеновского излучения в разрядах широкого диапазона рабочих давлений явилось основным косвенным экспериментальным свидетельством существования пучков убегающих электронов до начала обширного цикла экспериментальных исследований по их непосредственному обнаружению и диагностике. Впервые о регистрации пучка убегающих электронов за анодом из фольги с помощью цилиндра Фарадея сообщалось в работе [6]. В дальнейшем существенный вклад в непосредственное измерение характеристик пучка убегающих электронов внесли сотрудники Российского Федерального Ядерного Центра - Всероссийского НИИ Экспериментальной физики (ВНИИЭФ, г. Саров) [5,6], а также сотрудники Института общей физики РАН (ИОФАН, г. Москва) [7,8] и Института сильноточной электроники СО РАН (ИСЭ СО РАН, г. Томск) [9,10].

В настоящее время по итогам многолетнего изучения процессов генерации убегающих электронов и сопутствующего им рентгеновского излучения в различных газах и газовых смесях высокого давления накоплена значительная экспериментальная база [11-24]. В основном, прогресс в экспериментальной области обусловлен современным развитием экспериментальной техники: созданием наносекундных и субнаносекундных высоковольтных генераторов [25-27], появлением широкополосных осциллографов реального времени с полосой до 100 ГГц [28,29], разработкой токовых коллекторов с разрешением до 10 пс [30] и прочих инструментов для лабораторных исследований. Несмотря на значительный прорыв в области улучшения точности результатов физического эксперимента, до настоящего времени не представлялось возможным сделать какие-либо строго обоснованные выводы об энергетическом спектре пучка убегающих электронов, интегральные характеристики которого (например, полный ток) в настоящее время могут быть получены экспериментально с высокой степенью достоверности. Очевидную сложность экспериментального исследования явления убегания электронов в газах представляет тот факт, что функция распределения быстрых электронов не является объектом непосредственного измерения.

Теоретическое описание пучков убегающих электронов в таких условиях связано со значительными трудностями, существование которых объясняется тем, что распре-

деление убегающих электронов по энергиям является существенно немаквелловским и носит нестационарный характер. В целом, исследование генерации потоков убегающих электронов представляет собой процесс изучения нелинейной динамики сильно неравновесной физической системы, которой в данном случае является электрический разряд в газе. Широкий энергетический спектр пучка убегающих электронов претерпевает значительные временные трансформации, поэтому его динамика не подлежит строгому описанию в терминах средних значений энергии, концентрации, плотности тока и других так называемых моментов функции распределения. Попытки реализации данного подхода подробно изучались в ряде работ [31–33], где авторы использовали так называемый многогрупповой подход, хорошо зарекомендовавший себя в физике ядерного реактора. Поскольку моменты функции распределения представляют собой интегральные характеристики в которых интегрирование производится по интервалу энергий  $\varepsilon = [0, \infty)$ , авторы упомянутых исследований [31–33] искусственно разделяют электроны разряда в своей модели на несколько групп, характеризующихся различными значениями средних энергий. Данный подход приводит к противоречивым результатам: в частности, в моделях разряда атмосферного давления убегающие электроны составляют значительное количество от общего числа электронов, что не согласуется ни с одним из имеющихся в настоящее время экспериментов. Например, в [33] на стр. 183 вычисленное среднее значение энергии электронов равно 270 кэВ, притом, что амплитуда импульса падения напряжения на диоде не превышала заданные 190 кВ.

Другим теоретическим подходом, широко применяемым в настоящее время для моделирования процессов в физике плазмы и газового разряда, является так называемый метод крупных частиц (макрочастиц) или метод частиц в ячейке (particle-in-cell, PIC) [34,35]. При описании в терминах динамики макрочастиц, мы неизбежно будем сталкиваться с тем, что объём модельных крупных частиц, соответствующий малой доле реальных, может оказаться равным нулю. В таком случае метод крупных частиц весьма ограниченно можно рассматривать как инструмент, с помощью которого адекватно описываются ансамбли частиц с существенно немаквелловским распределением по энергиям.

Сегодня широкий спектр современных научных и прикладных проблем, тесно связанных с явлением перехода электронов в режим убегания, охватывает фундаментальные области управляемого термоядерного синтеза [36–41], физики атмосферных газоразрядных явлений, сопряжённых с генерацией мощных потоков рентгеновского и гамма излучений [42–45], разработки мощных импульсных лазеров с накачкой активной среды пучками убегающих электронов [46–49], применения пучков убегающих электронов для возбуждения импульсной катодолюминесценции в природных и

синтетических кристаллах полупроводниковой и диэлектрической природы (алмаза, кальцита, граната и пр.) [50-52]. Развитие данных областей требует более глубокого теоретического понимания процессов, приводящих к генерации и дальнейшей эволюции пучков убегающих электронов в газах высокого давления. Поскольку микроскопическое описание низкотемпературной плазмы разряда на практике неосуществимо из-за необходимости описывать движение и столкновение каждой заряженной и нейтральной частицы плазмы в отдельности, то кинетический подход представляется единственной фундаментальной альтернативой. Отталкиваясь от имеющихся на сегодняшний день кинетических моделей [53-57], следует в первую очередь отметить необходимость построения именно нестационарных теорий, так как наиболее ценную информацию о кинетике процессов даёт мгновенное значение функции распределения, а не её асимптотическое (предельное) значение. В связи с вышеизложенным тематика диссертационной работы, направленной на теоретическое изучение явлений формирования потоков убегающих электронов в пространственно неоднородных газовых разрядах атмосферного давления с помощью методов физической кинетики, представляется актуальной.

## **Цели и задачи работы**

Цель данной диссертации - разработка и вычислительная реализация современных теоретических моделей формирования субнаносекундных электрических разрядов в газах высокого давления и детальное пространственно-временное описание процессов взаимодействия электрических полей с электронами в таких разрядах.

Для достижения поставленной цели предполагалось решение следующих основных задач:

1. Разработка достоверных и универсальных методов математического описания нестационарных и пространственно-неоднородных процессов взаимодействия электрических полей с электронами в различных средах (плотный газ, полупроводник, вакуум);
2. Построение новых теоретических моделей субнаносекундного электрического разряда в газе высокого давления на базе фундаментальных принципов физической кинетики, позволяющих рассчитать пространственно-временную эволюцию функции распределения электронов по энергиям в газоразрядной плазме;
3. Проведение детальных численных расчётов всех этапов пробоя газонаполненного промежутка в условиях сильно неоднородного распределения электростатического поля и объяснение на этой основе основных физических параметров таких кинетических эффектов, например, как формирование потока убегающих электронов.

## **Научная новизна работы**

1. На численно-аналитическом уровне реализован метод решения некорректно поставленной (по Адамару) обратной задачи для восстановления спектров немонохроматических пучков электронов на основании конечного множества экспериментальных данных об их ослаблении в металлических фольгах различной толщины. С использованием этой методики решения обратной задачи были рассчитаны непрерывные спектры потоков быстрых электронов в наносекундном газовом разряде высокого давления;
2. Сформулирована эффективная теоретическая модель, реализующая гибридное описание быстрого газового разряда высокого давления исходя из принципов физической кинетики для неравновесного потока убегających электронов и упрощённого “гидродинамического” описания для плазмы;
3. В рамках гибридной модели получены физические характеристики разряда высокого давления в одномерной осесимметричной конфигурации разрядного промежутка, а также впервые вычислена функция распределения быстрых электронов как в плазме разряда, так и за анодом из металлической фольги заданной толщины;
4. Построена теоретическая модель разряда высокого давления, полностью основанная на кинетическом описании плазмы разряда и убегających электронов. Она даёт исчерпывающее объяснение процессов, происходящих при формировании пучка убегających электронов, в частности, объясняет возможность появления электронов с энергиями, превосходящими максимальное падение напряжения на разрядном промежутке (электроны с “аномальными” энергиями);
5. В рамках полностью кинетической модели получены физические характеристики разряда высокого давления в одномерной осесимметричной конфигурации разрядного промежутка, включая полный энергетический спектр электронов в разряде и за анодом из алюминиевой фольги заданной толщины.

## **Теоретическая и практическая значимость работы**

1. Разработан и реализован в виде прикладной программы метод восстановления исходных спектров быстрых электронов по дискретным экспериментальным данным об ослаблении их потока в металлических фольгах различной толщины. С его помощью были рассчитаны спектры пучков убегających электронов, формируемых в газовых



разрядах высокого давления, без предварительных предположений о форме и ширине восстанавливаемого энергетического спектра. Практическое и теоретическое преимущество оригинальной методики состоит в том, что она позволяет выявлять неприемлемые ошибки в исходных массивах экспериментальных данных об ослаблении пучков в фольгах. Полученные данные имеют большое прикладное значение с позиций применения газонаполненных диодов, работающих в наносекундном и субнаносекундном режимах для генерации сверхкоротких импульсов рентгеновского излучения и/или накачки активной среды газовых лазеров;

2. В рамках нестационарного гибридного и полного кинетического моделирования наносекундного разряда в газах высокого давления выяснены основные теоретические закономерности зарождения и дальнейшей эволюции потока убегающих электронов в разрядах. В частности, теоретические выводы указывают на то, что пучок убегающих электронов зарождается на фронте волны ионизации, распространяющейся из области усиленного поля. Также исследованы зависимости количества убегающих электронов и характеристик пучка от скорости нарастания фронта напряжения на промежутке;
3. Разработана методика численного решения кинетического уравнения, которая может быть применена для решения аналогичных вычислительных задач вакуумной электроники, физики плазмы и физики полупроводников, теоретические модели которых содержат уравнение Больцмана, уравнения непрерывности потоков частиц и полевые уравнения (Максвелла или Пуассона). Предложенный подход подразумевает гибридное применение кинетического и гидродинамического описания аналогичных задач в различных пространственных размерностях. Например, решение трёхмерной гидродинамической (макроскопической) задачи о развитии разряда можно совместить с одномерным расчётом характеристик пучка убегающих электронов, генерируемых данным разрядом. По сравнению с полностью трёхмерным моделированием такое описание значительно сокращает время вычислений и экономит вычислительные ресурсы;
4. Предложен оригинальный теоретический расчёт механизма появления группы убегающих электронов, которые имеют средние энергии, превышающие мгновенное значение приложенного к промежутку напряжения (электронов с т.н. “аномальными” энергиями).

## **Методология и методы исследования**

Методология исследований, проведённых в диссертационной работе основывается на сочетании общих и специальных научных методов, доминирующую роль среди которых занимают теоретические методы моделирования и обработки получаемых наборов данных. При построении теоретических моделей использовались как традиционные, так и новые методы макроскопического и детерминистического описания плазменных и газоразрядных явлений. Традиционные методы успешно адаптировались и усовершенствовались с учётом поставленных задач и имеющихся в распоряжении автора технических возможностей.

## **Положения, выносимые на защиту**

1. На базе теоретического математически устойчивого метода обработки экспериментальных зависимостей ослабления электронных пучков в тонких фольгах математически корректно доказано наличие многомодовой структуры спектров убегающих электронов в субнаносекундном газовом разряде высокого давления, а в ряде случаев – присутствие небольшой группы (до 10 % всего ансамбля быстрых электронов) с так называемыми “аномально высокими энергиями”;
2. Сформулирована и реализована на численно-аналитическом уровне математического описания гидродинамическая модель переноса тока в пространственно-одномерной неоднородной ионизационно-активной низкотемпературной плазме. На этой основе в рамках единого подхода впервые смоделирована на микроструктурном уровне работа полупроводникового диода Ганна в цепи наносекундного генератора СВЧ-колебаний и рассчитана детальная пространственно-временная картина развития электрического пробоя плоского газонаполненного диода. Модификация этой модели применительно к субнаносекундному пробую газонаполненного коаксиального промежутка позволила исключить из неё описание деталей формирования и функционирования слоя прикатодного падения потенциала, включая эмиссионные процессы на катоде, что резко упростило вычислительную реализацию модели быстрого разряда в плотном газе с убегающими электронами;
3. В рамках гибридной модели описания разрядов с убегающими электронами доказано, что кинетический расчёт зарождения и формирования потока убегающих электронов с учётом только двух элементарных процессов даёт физически обоснованный теоретический прогноз количества быстрых электронов. Исходя только из известных

- параметров сечений ионизационных и упругих столкновений электронов, впервые удалось правильно оценить как количество, так и характерную энергию быстрых электронов, наблюдаемых в экспериментах по пробое азота, воздуха и гексафторида серы (давления от десятка до нескольких сотен кПа, длины зазоров от 0.5 до 10 см, степени начальной неоднородности поля от 5 до 50 раз);
4. В рамках гибридной модели показано, что поток убегающих электронов в газовом разряде высокого давления естественным образом формируется за счёт экстракции (по импульсам) в сильном электрическом поле и последующего непрерывного ускорения электронов из хвоста энергетического спектра плотной плазмы на фронте волны ионизации газа. Электронная эмиссия с катода при таком механизме взаимодействия поля и плазмы в разрядах высокого давления не является главным фактором образования пучка убегающих электронов;
  5. Анализ электродинамического механизма ускорения единичного электрона бегущим доменом продольного электрического поля выявил необходимые и достаточные условия его реализации применительно к электронам в газовом разряде с неоднородной геометрией диода. Расчёты кинетики движения электронов и динамики электрического поля в газовом разряде в деталях демонстрируют то, как в неравновесной плазме естественным путем могут появляться электроны с “аномально высокими энергиями”. В расчётах наносекундного разряда “степень аномальности” (отношение максимальной энергии электронов в пучке к величине  $qU_{max}$ ), как правило, не превышает 150 %;
  6. На базе последовательного кинетического подхода применительно к электронной компоненте плазмы впервые самосогласованным количественным расчётом продемонстрирована определяющая роль убегающих электронов в инициировании процесса наработки объёмной плазмы в разрядах с прикатодной предыонизацией промежутка. Так, в коаксиальном промежутке немногочисленные вторичные электроны каскада, генерируемые даже небольшим потоком убегающих электронов перед фронтом волны ионизации, обеспечивают быстрое заполнение плазмой межэлектродного пространства (скорости движения фронта плотной плазмы до  $5 \cdot 10^9$  см/с) и формирование группы электронов с “аномально высокими энергиями”. Применительно к экспериментальным условиям трёхмерной геометрии доля “аномально ускоренных электронов” должна кратно снижаться по сравнению с одномерными модельными расчётами.

## Личный вклад автора

Автор внёс определяющий вклад в создание теоретической базы диссертационной работы, в написании статей и монографий по тематике диссертации, в проведении расчётов и обработке экспериментальных результатов. Диссертация и автореферат написаны автором лично. Все программные коды для численного решения систем дифференциальных уравнений теоретических моделей написаны автором самостоятельно.

Разработка алгоритма восстановления спектров быстрых электронов на основании экспериментальных данных о кривых поглощения в фольгах различной толщины путём решения некорректно поставленной задачи методом регуляризации Тихонова-Арсенина, и создание программного кода для данных расчётов были реализованы автором лично под непосредственным руководством д.ф.-м.н. А.В. Козырева. Обработка экспериментальных кривых поглощения также проводилась автором лично при участии А.В. Козырева и Е.Х. Бакшта. Огромная заслуга в успешном проведении экспериментов по измерению кривых поглощения быстрых электронов в фольгах различной толщины для газовых диодов различных конструкций, а также их обсуждению принадлежит Лаборатории оптических излучений ИСЭ СО РАН под руководством д.ф.-м.н. В.Ф. Тарасенко.

Гибридная теоретическая модель газового разряда высокого давления со значительным перенапряжением, учитывающая кинетические эффекты неравновесной функции распределения пучка убегающих электронов, была предложена автором непосредственно. Формулировка математической модели данного теоретического подхода активно обсуждалась и разрабатывалась совместно с д.ф.-м.н. А.В. Козыревым и аспиранткой Н.С. Семенюк (Олейник). Программный код для расчётов изначально был написан автором лично, и впоследствии дорабатывался Н.С. Семенюк (Олейник). Одномерная модель разряда высокого давления в дрейфово-диффузионном приближении предварительно была апробирована на решении задач о моделировании доменов сильного поля в диодах Ганна лично В.Ю. Кожевниковым при участии к.ф.-м.н. В.Ю. Конева и к.ф.-м.н. А.И. Климова. Автор принимал ведущее участие в развитии и совершенствовании одномерной модели осесимметричного газового диода в рамках построенной гибридной модели совместно с А.В. Козыревым и Н.С. Семенюк (Олейник).

Полностью кинетическая теоретическая модель газового разряда, которая позволяет расширить пределы применимости ранее сформулированной гибридной модели на произвольный диапазон давлений газа была предложена автором совместно с А.В. Козыревым. Формулировка математической модели данного теоретического подхода активно обсуждалась и разрабатывалась совместно с А.В. Козыревым и Н.С. Семенюк (Олей-

ник). Несколько вариантов программного кода для расчётов разрабатывались автором совместно с Н.С. Семенюк (Олейник). Тестирование программной реализации решателей систем уравнений Пуассона-Власова и Максвелла-Больцмана осуществлялось под руководством автора диссертации в сотрудничестве с аспиранткой Н.С. Семенюк (Олейник).

## Степень достоверности и апробация работы

Высокая степень достоверности результатов изложенных в диссертации определяется использованием наиболее современных методов теоретического исследования и внутренней непротиворечивостью полученных результатов. Они согласуются с выводами работ других исследователей, сделанными на основании иных теоретических методов. Также высокую степень достоверности представленных результатов подтверждает их хорошее согласие с результатами экспериментальных работ.

Основные результаты работы докладывались автором лично на: XI Международной конференции “Импульсные лазеры на переходах атомов и молекул” (AMPL) (г. Томск, Россия, 2013 г.) [58, 59]; Международной конференции “26th Symposium on Plasma Physics and Technology” (г. Прага, Чешская республика, 2014 г.) [60]; Международной конференции “International Congress Energy Fluxes and Radiation Effects” (EFRE) (г. Томск, Россия, 2014-2018 г.) [61, 62]; Международной конференции по физике плазмы (ICOPS) (г. Белек, Турция, 2015 г.) [63]; 66-ом Ежегодном Форуме Австрийского Физического сообщества (г. Вена, Австрия, 2016 г.) [64]; Международной конференции “International Congress Energy Fluxes and Radiation Effects” (EFRE) (г. Томск, Россия, 2016 г.) [65]; Телекоммуникационном форуме (TELFOR) (г. Белград, Сербия, 2013-2017 гг.) [66-69]; Международной конференции "19th Conference on Plasma and its Applications" (г. Иерусалим, Израиль, 2017 г.) [70]; Международной конференции "42nd Conference of the Middle-European Cooperation in Statistical Physics" (MECO 42) (г. Лион, Франция, 2017 г.) [71]; Международной конференции "21st IEEE Pulsed Power Conference" (г. Брайтон, Великобритания, 2017 г.) [72]; Международной конференции "8th Plasma Physics by Laser and Applications Conference" (г. Мессина, Италия, 2017 г.) [73]; Международной конференции "International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications" (ICEAA) (г. Верона, Италия, 2017 г.) [74]; Международной конференции по проблеме космических лучей "COSMIC RAYS: the salt of the star formation recipe" (г. Флоренция, Италия, 2018 г.) [75]; 11-й Международной конференции по вычислительным проблемам тепло- и массопереноса "XI International Conference on Computational Heat, Mass and Momentum Transfer (ICCHMT)" (г. Краков, Польша).

ша) [76], на Международной конференции "2018 International Conference of Electrical and Electronic Technologies for Automotive" (Automotive 2018, г. Милан, Италия) [77], на Международной конференции "28th International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV)" (г. Грайфсвальд, Германия) [78], на Международном симпозиуме по сильноточной электронике (г. Томск, Россия) [79], а также на научных семинарах и отчётных сессиях Института сильноточной электроники СО РАН.

Результаты исследований по тематике диссертации опубликованы в двух монографиях [80,81] и 62-х научных работах [58-79,82-121]. Среди них 23 статьи в журналах, которые входят в перечень ВАК российских и зарубежных научных журналов где должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёных степеней доктора и кандидата наук. Также в число научных работ включён 31 доклад на Международных и Российских симпозиумах, конгрессах и конференциях, из которых 12 включены в международные системы цитирования Web of Science и/или Scopus.

## Объём и структура работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, и заключения. Полный объём диссертации составляет 235 страниц с 56 рисунками. Список литературы содержит 328 наименований.

Во **введении** развёрнуто обоснована актуальность темы исследований, определены цели и задачи исследований, сформулированы научная новизна и практическая значимость диссертации, а также перечислены защищаемые положения.

В **первой главе** приводится краткий литературный обзор теоретических и экспериментальных подходов к изучению быстропротекающих процессов взаимодействия сильных электрических полей с неравновесными потоками электронов. Основной акцент делается на рассмотрение вопросов динамики наносекундных и субнаносекундных газовых разрядов высокого давления, а также на генерацию интенсивных потоков убегających электронов в таких разрядах.

Во **второй главе** излагаются теоретические методы и подходы к описанию электродинамических процессов. Глава разделена на три части. В первой части излагаются теоретические основы методики восстановления спектров быстрых электронов на основании данных кривых поглощения пучка быстрых частиц в алюминиевых фольгах различной толщины. Подробно поясняется, почему данная задача относится к классу так называемых “некорректно поставленных” (согласно критерию Адамара) задач математической физики, приводятся математические основы её решения, а также излагается

основной численный алгоритм решения уравнения Фредгольма первого порядка. В качестве основного результата приводятся восстановленные энергетические спектры убегающих электронов, получаемые благодаря предложенной методике на основании экспериментальных кривых поглощения. Второй раздел главы описывает набор методов для численного решения уравнений макроскопических моделей физики газовых разрядов и физики полупроводников. В качестве апробации методов приводится пример решения макроскопических уравнений, описывающих динамику формирования доменов сильного поля в СВЧ-диодах Ганна. Третью часть главы составляют детальные описания численных алгоритмов решения кинетических уравнений Больцмана и Власова. На примере решения двух задач из вакуумной электроники демонстрируется применение метода непосредственного решения кинетического уравнения. Последовательно решаются задача о возникновении колебаний объёмного заряда в диоде Чайлда-Ленгмюра и задача об инжекции электронного пучка в эквипотенциальный плоский зазор.

**В третьей главе** объясняются основные принципы теоретического моделирования газовых разрядов высокого давления и подробно приводятся решения задач макроскопического моделирования стационарных, наносекундных и субнаносекундных разрядов в двух базовых пространственных постановках (одномерной планарной и одномерной осесимметричной) для азота и гексафторида серы.

**Четвёртая глава** посвящена построению гибридной теоретической модели разряда, генерирующего пучки убегающих электронов. В ней приводится сравнение с экспериментальными данными параметров разряда и пучка убегающих электронов, полученных в результате гибридного моделирования. Предложенный подход применяется для решения ряда задач о развитии разрядов, генерирующих интенсивные потоки убегающих электронов. Здесь же полностью решается задача о генерации убегающих электронов в одномерном осесимметричном газовом диоде, вычисляются энергетический спектр и ток пучка быстрых электронов с учётом поглощения пучка в алюминиевой фольге заданной толщины.

**В пятой главе** изложена полностью кинетическая модель быстрого разряда высокого давления, приводятся основные результаты расчётов в рамках этой модели и их сравнение с результатами вычислений в рамках гибридной модели описанной в предыдущей главе. Показывается сравнение энергетических спектров и токов пучка убегающих электронов за фольгированным анодом, которые получены на основании полного кинетического подхода и гибридного кинетического подхода. Отдельный раздел главы посвящён проблеме возникновения в спектре пучка групп убегающих электронов, которые имеют т.н. “аномальные” энергии. В разделе впервые даётся элементарная теория явления ускорения одиночных электронов до аномально высоких скоростей,

подкрепляемая результатами подробного кинетического моделирования. Кратко упоминаются наиболее существенные перспективы применения обоих теоретических подходов.

Работа завершается **заключением**, в котором приведены основные выводы по результатам выполненной работы.

## **Благодарности**

Автор выражает глубокую благодарность и признательность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору **Андрею Владимировичу Козыреву** за помощь и содействие в создании этой диссертационной работы. Также автор выражает благодарности своим старшим коллегам и учителям: **Виктору Федотовичу Тарасенко** (Институт сильноточной электроники, Россия), **Терри Каллагану** (Университет Шеффилда, Великобритания), **Герберту Крёмеру** (Университет Калифорнии, США), **Уильяму Шиссеру** (Лихайский университет, США), **Андрею Андреевичу Куликовскому** (Московский государственный университет, Россия), **Владиславу Гавриловичу Багрову** (Томский государственный университет, Россия), **Алексею Ивановичу Климову** (Институт сильноточной электроники, Россия), **Алексею Анатольевичу Шарапову** (Томский государственный университет, Россия).

Работа выполнялась при частичной поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 12-08-31171, 15-08-03983, 15-58-53031, 17-08-00932, 18-52-53003, а также программы повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета.

Также автор выражает свою глубокую благодарность Институту инженеров электротехники и электроники (**IEEE**), в особенности Фонду добровольных вкладов (Voluntary Contribution Fund, IEEE) и лично **Андреасу Колтесу** за финансовую и информационную поддержку исследований, включённых в данную диссертационную работу.



# Глава 1

## Быстропротекающие процессы взаимодействия сильных электрических полей и заряженных частиц

Широкий спектр всевозможных явлений электрического разряда, протекающего при высоких давлениях газовой среды представляет собой исключительный интерес с фундаментальной и практической точек зрения для современной физической науки [122–125]. Среди всего разнообразия проявлений электрических разрядов в плотных газах, в настоящее время изучение наносекундных и субнаносекундных разрядных явлений выделяют в отдельную отрасль науки. Этому способствует создание и широкое применение мощных малогабаритных импульсно-периодических генераторов, работающих в наносекундном и субнаносекундном диапазонах длительностей импульсов [25–27], а также совершенствование цифровой техники осциллографирования широкополосных сигналов в режиме реального времени, позволяющей регистрировать сигналы с рабочей полосой до 100 ГГц [28, 29]. Справедливо заметить, что субнаносекундные процессы в электрофизических экспериментах и приборах импульсной техники использовались и ранее. Так, например, изучение сильноточных генераторов, построенных на формирующих линиях и искровых коммутаторах, началось ещё в начале 1950-х годов [126]. Однако именно уровень развития измерительных приборов являлся и до сих пор остаётся, пожалуй, единственным лимитирующим фактором, сдерживающим поступательный прогресс в изучении процессов субнаносекундных временных длительностей.

Актуальные возможности генерации коротких (порядка сотен пикосекунд) высоковольтных импульсов напряжения, следующих с высокой частотой повторения заложили основу современной экспериментальной базы ускорительной техники, физики полупроводников, радиационной биологии и биофизики, релятивистской техники сверхвысоких частот, а также физики газовых разрядов наносекундных и субнаносекундных длительностей. Отличительной особенностью электрических разрядов таких длительностей является то, что они сопровождаются генерацией т.н. “убегающих” электронов, которые представляют собой малую высокоэнергетичную фракцию электронов разряда, переходящих в режим непрерывного ускорения и достигающих благодаря этому энергий в десятки и сотни кэВ. Экспериментальные работы по генерации убегающих электронов проводились для различных газов и газовых смесей, в широком диапазоне давлений ( $10^4 - 10^6$  Па), при различных значениях межэлектродного зазора (5 – 40 мм) и при вариации геометрических параметров и материалов электродов.

Несмотря на существенный прогресс в экспериментальных исследованиях, многие важные вопросы, непосредственно касающиеся процесса генерации пучков убегающих электронов в быстрых разрядах остаются открытыми. До конца не исследовано в каких частях разрядного промежутка начинается зарождение потока убегающих электронов, как и под влиянием чего формируется энергетический состав пучка, как убегающие электроны влияют на протекание разряда, какие электроны разряда (взрывоэмиссионные, автоэмиссионные, вторичные) в основном являются “затравочными” и т.д.

## **1.1 Элементарные представления о физической природе “убегания” электронов**

Физические условия появления убегающих электронов не ограничиваются только быстрыми атмосферными разрядами, изучаемыми в данной диссертационной работе. Так, например, пионерские работы, лежащие в основе понятия об убегающих электронах [127, 128], посвящены изучению кулоновской плазмы. Поэтому перед изложением теории процессов ускорения электронов в слабо-ионизованной плазме газового разряда высокого давления следует подробнее остановиться на общих механизмах формирования потоков быстрых электронов в объёме плазмы.

В основе физических механизмов, приводящих к “убеганию” электронов, лежит простая закономерность: при прохождении быстрого электрона через вещество его сечение столкновений с другими частицами падает с ростом скорости электрона. Это обусловлено быстрым убыванием кулоновского сечения столкновений с увеличением относительной скорости сталкивающихся частиц. Так, транспортное сечение упругого

столкновения электрона с  $Z$ -кратно заряженной частицей описывается формулой [129]

$$\sigma_{Ze} \approx \left( \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \right)^2 \log \left( \frac{\epsilon}{I_0} \right), \quad (1.1)$$

где  $\epsilon = mv^2/2$  - кинетическая энергия налетающего электрона в системе отсчёта второй частицы,  $I_0$  - характерная энергия, определённая с точностью до порядка величины,  $\epsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума,  $q$  - заряд электрона. Данная величина слабо влияет на оценку сечения, которое спадает обратно пропорционально квадрату кинетической энергии.

Поскольку все атомы и ионы состоят из заряженных ядер и орбитальных электронов, то асимптотическое выражение, в котором скорость быстрого электрона намного больше скорости орбитальных электронов, для транспортного сечения рассеяния быстрых электронов на атомах также имеет вид выражения (1.1), но характерная энергия в логарифме будет зависеть от сорта атома. Обозначим ниже эту характерную для данного сорта атомов энергию символом  $I_a$ . Именно транспортное сечение характеризует процесс потери направленной скорости быстрого электрона при его столкновении с атомами или молекулами газа.

При описании явления убегания электронов в веществе обычно используют не величину сечения, а т.н. *эффективную тормозящую силу*, которую испытывает быстрый электрон в газе нейтральных атомов. Данная сила характеризует средние потери кинетической энергии электрона на единице длины. Для газа нейтральных атомов химического элемента с номером  $Z$  (заряд ядра и количество орбитальных электронов в атоме) с концентрацией  $N$ , эффективная тормозящая сила описывается формулой в борновском приближении [129]:

$$-\frac{d\epsilon}{dx} = F_{Z,N}(\epsilon) = N \frac{Zq^4}{8\epsilon_0^2\pi\epsilon} \log \left( \frac{\epsilon}{I_a} \right), \quad (1.2)$$

Обычно характерную энергию берут из экспериментальных данных, но для её оценки можно пользоваться и эмпирической зависимостью  $I_a \sim I_H Z$  [129], где  $I_H$  - это энергия ионизации атома водорода. Для дальнейшего анализа важно, что эта сила пропорциональна плотности атомов газа и атомному номеру химического элемента. Если газ состоит из многоатомных молекул, то формально в выражении для тормозящей силы (1.2) этого газа вместо  $ZN$  надо записать полное число молекулярных электронов в единице объёма.

Формально функция (1.2) обращается в нуль при  $\epsilon = I_a$ , но в реальных газах это не так, потому что формула верна только при больших энергиях электрона, существенно

превышающих величину  $I_a$ . Тем не менее, формула (1.2) даёт правильный порядок величины потерь и за пределами её применимости. В частности, максимум функции (1.2) по порядку величины верно отражает реальные сечения атомных столкновений для лёгких элементов:

$$F_{max} \approx 3NI_H \cdot \pi(a_0)^2, \quad (1.3)$$

где  $a_0$  - радиус первой боровской орбиты атома водорода,  $I_H$  - энергия ионизации атома водорода.

Теперь можно записать уравнение баланса энергии электрона, движущегося в однородном электрическом поле с напряжённостью  $E$ :  $\frac{d\varepsilon}{dx} = qE - F_{Z,N}$  и построить зависимость силы  $\frac{d\varepsilon}{dx}$  от энергии  $\varepsilon$

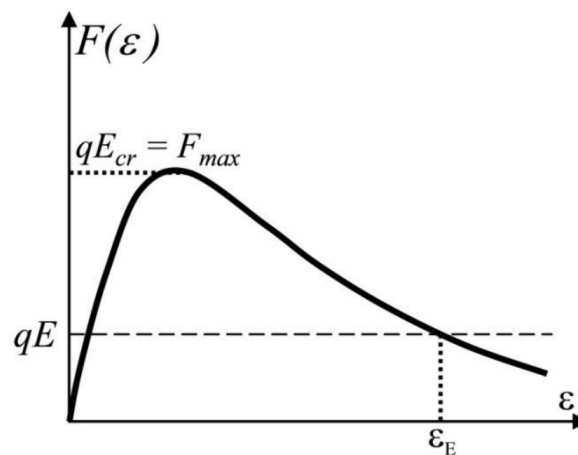


Рисунок 1.1 — Зависимость эффективной тормозящей силы от кинетической энергии электрона и величина критической напряжённости электрического поля.

Если на графике (1.1) напряжённость поля ниже максимальной силы, то электроны в среднем разделяются на две группы - медленные (плазменные) и быстрые (убегающие). Причём быстрые электроны, как это следует из рисунка (1.1), будут неограниченно набирать свою энергию, так как тормозящая сила будет убывать по мере набора их кинетической энергии, поэтому их и принято называть “убегающими”.

Из уравнения баланса мы получаем важный параметр процесса убегания, который называется критическим полем Драйсера: его напряжённость  $E_{cr}$  соответствует максимуму эффективной тормозящей силы. Полученная ниже формула

$$qE_{cr} = F_{max} \rightarrow \frac{E_{cr}}{N} \sim \frac{Zq^3}{8\pi^2\varepsilon_0^2 I_a}, \quad (1.4)$$

даёт значения, весьма близкие к экспериментально измеренным. Если для гелия ( $Z = 2$ ) и азота ( $Z = 14$ ) принять величины характерной энергии  $I_a$  примерно равными 44 и 80 эВ, соответственно (130), то из (1.4) мы получаем оценку приведённого к давлению

критического поля для гелия на уровне  $\sim 200$  В/(см Торр) и для азота  $\sim 800$  В/(см Торр). Этот уровень напряжённости поля, соответствующий минимуму кривой пробивных напряжений Пашена и средней величине поля в прикатодном слое нормального тлеющего разряда [122, 131], обеспечивает наиболее эффективный режим ударной ионизации газа электронами в постоянном электрическом поле.

Изложенная выше элементарная теория получила широкое распространение (см., например, обзор в [80]) в качестве основы представлений об убегающих электронах, несмотря на очевидно упрощённый характер. В ней рассматривалось лишь торможение одиночного электрона без учёта рассеяния быстрых электронов на электронах и ядрах молекул, также без учёта потерь на генерацию излучения. Более того, излучённые быстрыми электронами рентгеновские и гамма-кванты способны сами породить электрон-позитронные пары при столкновении с ядрами молекул. Разумеется, полноценное описание явления убегающих электронов может быть дано только в рамках последовательной кинетической теории.

Тем не менее, в свете необходимости перехода к кинетическому рассмотрению формирования потоков убегающих электронов следует отметить, что из (1.4) вытекает следующий важный вывод: при любом уровне напряжённости электрического поля имеется вероятность появления убегающих электронов в энергетическом хвосте функции распределения. Просто для параметров, типичных для газового разряда повышенного давления, вероятность наличия таких электронов в плазме оказывается исключительно низкой (математическое ожидание зачастую даже не превышает одного электрона). Например, для уровня статического пробивного напряжения в азоте  $\sim 40$  В/(см Торр) минимальные энергии электронов, отвечающие возможному переходу в режим непрерывного ускорения, должны превышать  $\varepsilon_E = 8$  кэВ. В обычном газовом разряде таких электронов практически нет, но ситуация меняется, когда в газоразрядный промежуток инжектируется пучок электронов от внешнего источника, тогда инжектируемые электроны могут продолжать набирать энергию даже в газонаполненном зазоре. Подобное дополнительное ускорение инжектируемого электронного пучка действительно наблюдается в плазме газового разряда, используемого для накачки активной среды газовых лазеров [132].

Отметим, что у разных исследователей величина критического поля Драйсера получается различной, но имеющей именно указанный выше порядок величины (1.4). Хотя это и довольно высокие напряжённости полей, более чем на порядок превышающие статические пробивные напряжённости для этих газов, современная импульсная техника позволяет реализовывать их на короткой стадии импульсного пробоя газов. Имеющиеся экспериментальные возможности позволяли ожидать довольно большие по-

токи убегающих электронов при подаче на газоразрядный промежуток высоковольтных импульсов с крутым фронтом. Тем более что первая количественная теория убегающих электронов А.В. Гуревича [133], посвящённая переходу малого потока электронов из максвелловской плазмы в область больших энергий, давала весьма оптимистичную оценку вероятности убегания:

$$P_{\text{run}} \sim \exp(-E_{cr}/4E),$$

однако уже первые эксперименты [6] и большое количество последующих [80] не подтвердили ожидаемых значений быстрых электронов, которые на практике оказались на порядки ниже, чем оценивалось ранее автором [133].

Рассмотрим теперь более внимательно реальные условия экспериментов и вытекающие из них возможные отличительные особенности от предсказаний в рамках стационарных теоретических моделей. В экспериментах высокие напряжённости электрического поля достигаются на стадии запаздывания пробоя за счёт использования импульсов напряжения в десятки и сотни киловольт с длительностью переднего фронта порядка наносекунды и менее. Результаты экспериментальных исследований (см. Главу 2) указывают на то, что быстрые электроны в разряде регистрировались как непосредственно за анодом из тонкой фольги, так и по наличию тормозного рентгеновского излучения, возникающего в результате бомбардировки анода электронным пучком [80]. Во всех экспериментах однозначно подтверждён прогноз о том, что т.н. “критические” поля в гелии в несколько раз ниже, чем в воздухе и азоте, однако наблюдаемое количество быстрых электронов оказалось значительно меньше того, что предсказывают упрощённые теоретические оценки. Целый ряд экспериментальных результатов получен при малых произведениях давления на длину зазора  $pd$ , когда средняя напряжённость формально была даже выше критических значений для исследуемого газа, например, [134]. В этих условиях в режим убегания должно было бы перейти большинство всех электронов разряда, но в реальности этого не происходило: число быстрых электронов по-прежнему было небольшим.

Многие экспериментальные факты [80] показали, что на процесс непрерывного ускорения электронов значительно влияют рассеивающие столкновения. Именно рассеяние быстрых электронов, приводящее к отклонению их траектории от продольной по отношению к электрическому полю, эффективно исключает электроны из режима “убегания”. Ещё в 1983 году А.В. Козырев [135] впервые указал на данный факт: с учётом рассеивающих столкновений были предсказаны критические поля, в несколько раз

большие, чем даёт выражение (1.4). Ниже кратко излагается, в чём суть предложенных новых оценок.

Эффективная тормозящая сила (1.2) имеет такую же функциональную зависимость от кинетической энергии  $\varepsilon$ , как и полное сечение неупругих столкновений [129]

$$\sigma_n = \frac{2q^2}{\hbar^2 v^2 \varepsilon_0} \langle d_x^2 \rangle \log \left( \beta_1 \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar v}{q^2} \right) \sim \frac{\log(\varepsilon/I_a)}{\varepsilon}, \quad (1.5)$$

где  $\langle d_x^2 \rangle$  - средний квадрат дипольного момента электронов в атоме,  $\hbar$  - постоянная Планка,  $\beta_1$  - безразмерный параметр, близкий к единице, остальные обозначения аналогичны данным выше.

Записывая теперь тормозящую силу через сечение (1.2), характеризующее потерю энергии в столкновении, можно оценить среднюю потерю в одном столкновении  $\langle \Delta\varepsilon_n \rangle$ :

$$-\frac{d\varepsilon}{dx} \equiv F(\varepsilon) = N \frac{Zq^4}{8\varepsilon_0^2 \pi \varepsilon} \log \left( \frac{\varepsilon}{I_a} \right) = \sigma_n(\varepsilon) N \langle \Delta\varepsilon_n \rangle, \quad (1.6)$$

$$\langle \Delta\varepsilon_n \rangle \approx Z \frac{ma_0^2 q^6}{\hbar^2 (4\pi\varepsilon_0)^2 \langle d_x^2 \rangle} \sim Z I_H \sim I_a.$$

Выражение (1.6) проясняет физический смысл характерной энергии  $I_a$  - это средняя энергия, теряемая быстрым электроном в одном столкновении с атомом. Она примерно пропорциональна количеству электронов в атоме. Это также означает, что быстрый электрон теряет относительно небольшую долю своей энергии в каждом столкновении, но длина пробега между столкновениями с ростом энергии убегающего электрона монотонно увеличивается, так как столкновения становятся всё более редкими из-за уменьшения сечения (1.5).

Можно формально записать выражение, аналогичное (1.6), пользуясь транспортным сечением (1.1), тогда мы получаем

$$\langle \Delta\varepsilon_s \rangle \approx 4Z\varepsilon. \quad (1.7)$$

Понятно, что величина *средней потери энергии в рассеивающем столкновении*  $\langle \Delta\varepsilon_s \rangle$  не может превышать энергию электрона  $\varepsilon$ . Но это говорит только о том, что одни рассеивающие столкновения не могут объяснить эффективную силу. Вместе с тем выражение (1.7) наводит на мысль о том, что каждое рассеивающее столкновение в среднем приводит к потере всей энергии быстрого электрона  $\varepsilon$ . С точки зрения процесса непрерывного ускорения это действительно так: рассеяние на большой угол (а именно такие столкновения описываются транспортным сечением) приводит к “гибели” убегающего электрона. В реальности кинетическая энергия у рассеянного электрона



почти не меняется, но движется он не вдоль отрезка прямой действия ускоряющей силы. После следующих рассеивающих столкновениях такой электрон может вернуться к прежнему направлению, но этот возврат маловероятен. В реальных же экспериментах, когда время существования сильного поля в разряде ограничено десятками-сотнями пикосекунд, возврат к режиму ускорения практически невозможен.

Отсюда возникает ключевая идея: для определения вероятности перехода электрона в режим непрерывного ускорения надо оценить вероятность  $P_{\text{run}}$  того, что электрон, стартуя с начальной энергией  $\varepsilon(0)$  вдоль однородного поля  $E$ , вообще не испытает ни одного рассеивающего столкновения с атомами газа. Речь идет о наборе максимально возможной, т.е. бесконечной энергии. Эту вероятность нетрудно рассчитать, если написать уравнение динамики такой вероятности:

$$\frac{dP(\varepsilon)}{dx} = qE \frac{dP(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -P(\varepsilon)\sigma_{Ze}N, \quad (1.8)$$

где была использована связь между координатой и кинетической энергией ускоряющегося электрона при одномерном движении (без рассеивания)  $d\varepsilon = qEdx$ . Решая уравнение (1.8), мы получим искомую вероятность “убегания”:

$$\begin{aligned} P_{\text{run}} &= \exp \left\{ -\frac{N}{qE} \int_{\varepsilon(0)}^{\infty} \sigma_{Ze}(\varepsilon) d\varepsilon \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{Z^2 N q^3}{32qI_a E \pi \varepsilon_0^2} \left( \frac{\log y(0) + 1}{y(0)} \right) \right\}, \quad y = \frac{\varepsilon}{I_a}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Полагая, что начальная минимально возможная энергия по формуле (1.1), т.е. принимая  $y(0) = 1$ , мы получаем новую оценку критического поля:

$$P_{\text{run}} = \exp \left\{ -\frac{NZ^2 q^3}{32I_a E \pi \varepsilon_0^2} \right\} = \exp \left\{ -\frac{E_{cr}}{E} \right\} \rightarrow \frac{E_{cr}}{N} = \frac{Z^2 q^3}{16\pi \varepsilon_0^2 I_a}. \quad (1.10)$$

Формула (1.10) выведена для одноатомного газа. Например, для гелия надо подставить  $Z = 2$  и  $I_a = 44$  эВ. Для двухатомного газа в этой формуле надо удвоить  $N$  (концентрация атомов в 2 раза выше концентрации молекул), а  $Z$  - атомный номер, например, для азота  $I_a = 80$  эВ и  $Z = 7$ , а не  $Z = 14$ , как это делали при оценке по формуле (1.4). В результате получим оценки для гелия - 210 В/(см · Тор) и азота - 1410 В/(см · Тор). Данная оценка критических полей существенно выше, чем давала прежняя теория (1.4). Кроме того, различия этого параметра между гелием и азотом больше, так как зависимость (1.10) содержит множитель  $\sim Z^2$ , а (1.4) только  $\sim Z$ . Формула (1.10) позволяет оценить критические поля не только для одно- или двухатомных



газов, но и для газов более сложного состава. Например, в случае элегаза мы получим 6790 В/(см · Тор).

Отметим, что сходимость интеграла от транспортного сечения в (1.9) указывает на существование конечной вероятности того, что электрон не отклонится заметно от направления действия ускоряющей силы. При конечных величинах приложенного к промежутку напряжения можно в интеграле (1.9) заменить бесконечный предел на максимальную в данном случае энергию, что скорректирует вероятность “убегания” в сторону бóльших значений энергии по сравнению с (1.9). В отличие от сходимости интеграла транспортного сечения, аналогичный интеграл от сечения неупругих столкновений (1.5) расходится на бесконечном пределе. Это означает, что убегающий электрон даже с большой энергией обязательно испытывает неупругие столкновения, то есть неизбежно потеряет часть энергии, т.к. ионизация представляет собой основной канал потерь энергии.

## 1.2 Экспериментальные методы исследования и их технические ограничения

Как говорилось ранее, уровень развития измерительных приборов до сих пор остаётся основным лимитирующим фактором, сдерживающим развитие субнаносекундной электронной техники. В полной мере данное замечание относится и к экспериментальному изучению электрофизических параметров быстрых разрядов. При исследовании нестационарного токопротекания в системах наносекундных и субнаносекундных газовых разрядов, основными объектами измерений являются мгновенные значения тока и напряжения. Осциллограммы быстропеременного тока разряда измеряются поясами Роговского или непосредственно снимаются с низкоиндуктивных токовых шунтов [136]. Измерение временных профилей напряжения, как правило, осуществляется с помощью емкостных или компенсированных омических делителей напряжения, расположенных в непосредственной близости от системы электродов разряда [136].

Другую возможность для изучения быстрых разрядов предоставляют современные скоростные средства видеосъёмки с использованием ICCD-фотокамер, например, [137–140]. Несмотря на то, что время затвора (срабатывания) составляет всего 1 – 3 нс и менее (вплоть до 200 пс), получаемые оптические изображения стоит признать малоинформативными с точки зрения развития представлений о пространственно-временной структуре распределения плазмы наносекундного разряда. Типичное фотографическое изображение ICCD-камеры представляет собой характерную интегральную картину свечения плазмы и возбуждённых нейтральных компонент газовой среды, что

может лишь условно коррелировать с реальной анатомией мгновенного распределения электронной или ионной компонент разряда. Прочие неинвазивные методы исследования [141] оптическая эмиссионная спектроскопия, активная лазерная и резонансная спектроскопия - не обеспечивают столь высокого временного разрешения, позволяющего проследить динамику эволюции компонент плазмы газовых разрядов интересующего нас типа.

С ещё большими трудностями сопряжено изучение процессов генерации потоков убегающих электронов. Примерно с 1965 года года появляются первые работы [2-6] в которых экспериментально показывается, что в газовых электрических разрядах длительностью несколько наносекунд генерируются убегающие электроны, которые при торможении молекулами газа или анодом вызывают рентгеновское излучение. Для регистрации пучка убегающих электронов электрод положительной полярности (анод) изготавливался из фольги, которая выполняла роль фильтра, пропускающего через себя только убегающие электроны. За фольгой пучок электронов мог регистрироваться цилиндром Фарадея, рентгеновским фотоэлектронным умножителем или сцинтилляторами. Материал и толщина анодной фольги непосредственно влияют на ослабление пучка и параметры фильтрации энергетического спектра. Впервые электронный пучок за фольгированным катодом был зарегистрирован в работе [6], однако уровень экспериментальной техники не позволил сделать ряд правильных выводов, касающихся механизмов генерации убегающих электронов в газовых диодах с существенно неоднородной конфигурацией электродов. До 2005 года в экспериментальных работах, выполненных в Институте сильноточной электроники (ИСЭ СО РАН) совместно с Институтом электрофизики (ИЭ УрО РАН) [12, 142-144], предельное временное разрешение экспериментального оборудования не превышало 300 нс, что приводило к значительному искажению параметров тока пучка электронов за анодной фольгой.

Появление новых широкополосных осциллографов реального времени, например, Tektronix TDS6604B и Tektronix TDS6804B, имеющих полосу 6 и 8 ГГц соответственно при 20 млрд. отсчётов в секунду, а позднее и других, с лучшим временным разрешением, например, Teledyne LeCroy WaveMaster 8Zi-B с рабочей полосой до 30 ГГц, позволило получить качественно новые данные о генерации убегающих электронов и об излучении рентгеновского спектра в газовых диодах [80, 81]. В воздухе, гелии, аргоне, криптоне, ксеноне, метане и элегазе при давлениях 0.3 – 1 атм были получены основные экспериментальные данные о сверхкоротких (менее 100 пс на полувысоте) лавинных электронных пучках [12, 13, 15, 145]. Они указывали на то, что пробой газоразрядных промежутков, составленных из электродов с малыми радиусами кривизны, всегда сопровождается генерацией пучков убегающих электронов [146]. Следует

отметить, что экспериментальное исследование данного явления представляет собой достаточно сложную научную задачу. С одной стороны, длительность импульса тока пучка мала (менее 100 пс) и зависит от площади анодной фольги, что существенно затрудняет её точное измерение даже современными осциллографами реального времени. С другой стороны, для проведения измерений необходимо, чтобы измерительный тракт обеспечивал возможность измерения характеристик с пикосекундным разрешением. Наконец, на результаты измерения оказывают влияние вариации параметров газовой смеси, стабильность формы импульса напряжения и различие геометрических параметров диода.

Одной из ключевых характеристик пучка быстрых электронов, определяемой различными методиками за анодной фольгой является энергетический состав (спектр) пучка. Ещё в работе [6] сообщалось, что анализ данных кривых поглощения убегающих электронов указывает на их немоноэнергетичность, однако тогда распределение по энергиям ещё не было получено. Несмотря на значительный объём экспериментальных работ, которые были сделаны ранее и касались изучения генерации пучков убегающих электронов при пробое газовых промежутков, приводимые данные о спектрах электронов сильно отличались. Трудность и неоднозначность методики измерения функции распределения электронов по энергиям породили множество конкурирующих точек зрения касательно вопроса о её форме. Так, автор работ [32, 147] утверждает, что основная доля убегающих электронов за фольгой обладает энергиями, существенно превышающими максимальное приложенное к диоду напряжение, умноженное на заряд электрона (т.н. электроны с “аномальными энергиями”). Максимумы распределения превышали максимальное приложенное к диоду напряжение в 1.5 – 1.7 раза. Данная точка зрения оспаривается в экспериментальных работах других авторов, которые отмечают, что доля таких электронов составляет менее десяти процентов от всех убегающих электронов [9, 12, 148], либо отсутствует совсем [23].

Для измерения спектрального состава потока убегающих электронов за анодной фольгой монтировалась вакуумная камера, в которой на некотором удалении от анода устанавливался токовый коллектор [149], либо магнитный спектрометр [150]. Общая схема для экспериментальной регистрации пучков убегающих электронов изображена на Рисунке 1.2. В область между коллектором и анодной фольгой-фильтром пучок в ряде экспериментов [149] транспортируется в продольном магнитном поле, а газовая среда в этой области откачивается форвакуумным насосом. Так как убегающие электроны могут проходить не только фольгу, но и отклоняться в стороны стенок газового диода, то для коллимации пучка быстрых электронов на входе в вакуумную камеру дополнительно устанавливается диафрагма диаметром 3 – 10 мм. Это позволяет анализировать спектр

малой части электронов, выходящих из центральной площадки анода. В качестве материала для анодной фольги при изучении ослабления пучка убегающих электронов выбирался алюминий, а для ослабления рентгеновского спектра также использовалась и медь.

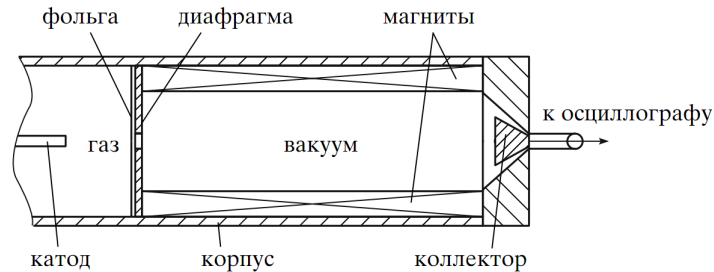


Рисунок 1.2 — Пример схемы экспериментальной установки для непосредственного измерения спектра быстрых электронов методом времяпролётной спектроскопии [149].

Если последовательно увеличивать толщину анодной фольги от одного измерения к другому, то можно построить т.н. “кривую ослабления” амплитуды тока убегающих электронов, при условии, что прочие условия эксперимента остаются неизменными. Пример кривой ослабления, приведённый в работе [23], изображён на Рисунке 1.3.

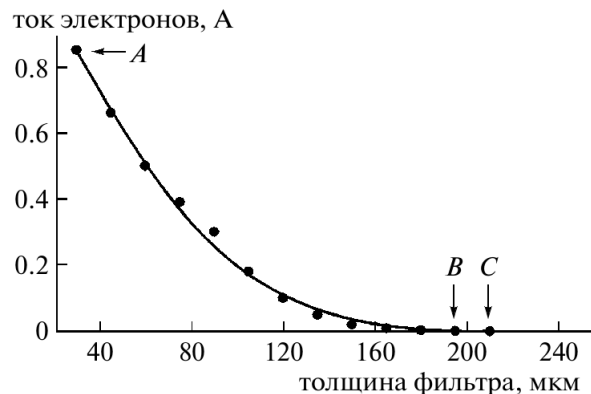


Рисунок 1.3 — Пример кривой ослабления тока убегающих электронов при изменении толщины алюминиевого фильтра (анода). Ускоряющий импульс на катоде имеет максимальную амплитуду 570 кВ. Точка *A* соответствует ослаблению тока фольгой 15 мкм, экранирующей коллектор пучка; *B* – случай предельного прохождения пучка; *C* – порог отсечки.

С ростом толщины алюминиевого фильтра, амплитуда тока (и полный заряд) будут убывать до некоторого значения, начиная с которого ток в цепи коллектора будет полностью отсутствовать. Это значение является порогом отсечки фильтра-поглотителя. Кривая ослабления представляет собой объект непосредственного экспериментального измерения, имеющий обычно значительную систематическую и случайную погрешности. Так, вблизи порога отсечки анодной фольги незначительные изменения напряжения на диоде приводят к существенной нестабильности измеряемого тока пучка убегающих

электронов от импульса к импульсу. С другой стороны, и вдали от порога отсечки, импульсы напряжения на диоде сохраняют некоторую нестабильность [23]. Помимо этого, условия начальной предыонизации существенно влияют на режим протекания наносекундного электрического разряда в газовых диодах, работающих в импульсно-периодическом режиме, что также вносит систематическую ошибку при измерении кривой ослабления. При увеличении амплитуды напряжения на газовом диоде, интенсивность пучка быстрых электронов растёт одновременно с уровнем погрешности измерения тока, тем самым снижая достоверность представления кривой ослабления (Рисунок 1.4) [23].

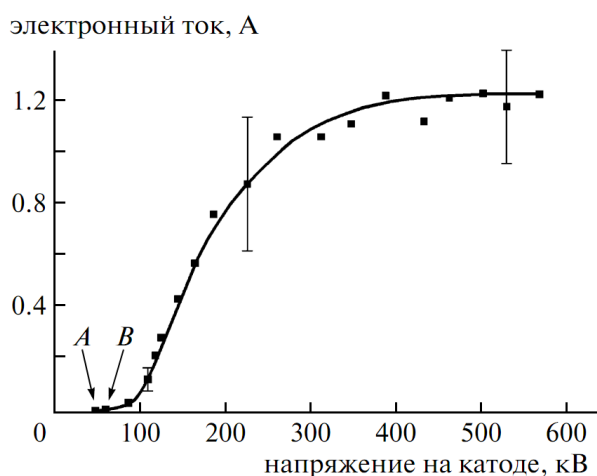


Рисунок 1.4 — Зависимость средней за 50 импульсов амплитуды тока убегающих электронов, прошедших через алюминиевый фильтр толщиной 15 мкм, от приложенного напряжения.

В наносекундных разрядах длительности импульсов тока быстрых электронов с коллектора зачастую не превышают 100 пс, а в отдельных случаях составляют даже 10 – 20 пс. В связи с этим отдельной проблемой данного физического эксперимента является достоверное осциллографирование сигналов коллектора, фактически получаемых на пределе разрешения современных цифровых осциллографов реального времени. При регистрации одиночных импульсов субнаносекундной длительности определённую задачу выполняют встроенные функции цифровой пост-обработки сигнала, реализуемые в конкретной модели прибора. Поскольку данные алгоритмы обработки сигналов в современных осциллографах подробно не документируются и не распространяются отдельно в виде открытых программных кодов, то у экспериментаторов зачастую нет чёткого понимания того, как именно последовательность дискретных отсчётов преобразуется в сигнал на экране прибора. В итоге, аналогово-цифровое преобразование входного сигнала претерпевает существенную цифровую обработку, благодаря чему амплитудное значение тока коллектора представляет собой “восстановленное” (ин-

терполированное и экстраполированное), а не измеренное непосредственно значение. Также отмечалось [151], что наличие у цифрового осциллографа значительного “запаса” по частоте семплирования сигнала не гарантирует точной реализации возможности восстановления сигнала, предусмотренной теоремой Найквиста-Котельникова. Данное обстоятельство связано с тем, что восстановление сигнала  $s(t)$  по набору дискретных отсчётов  $s_k$ , следующих с интервалом времени  $\Delta t$ , согласно теореме выражается формулой

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sin(\pi(t - k\Delta t)/\Delta t)}{(\pi(t - k\Delta t)/\Delta t)},$$

которая содержит суммирование по формально бесконечной последовательности отсчётов [152]. Для практических приложений формула “восстановления” сигнала в базисе теоремы Найквиста-Котельникова всегда представляет собой лишь приближённое интерполяционное выражение

$$s(t) \simeq \sum_{k=1}^{2f_{max}T} s_k \frac{\sin(2\pi f_{max}(t - k\Delta t))}{2\pi f_{max}(t - k\Delta t)},$$

где  $f_{max}$  - максимальное значение частоты, которой условно ограничен спектр рассматриваемого сигнала,  $T$  - длительность временного интервала дискретизации. Другие виды интерполяции (линейная, сплайновая, вейвлетная) также используются для реконструкции сигнала и, в ряде случаев, могут быть более предпочтительными нежели разложение в базисе  $\sin(x)/x$ . Однако детали точных схем восстановления сигнала по набору дискретных отсчётов производителями цифровых осциллографов, как правило, не уточняются.

Среди основных проблем непосредственного определения спектров пучков убегающих электронов, генерируемых в разрядах атмосферного давления можно назвать ограниченность технических возможностей методов времяпролётной и магнитной спектрометрии. Она связана с потерями частиц во время транспортировки пучка, избирательной чувствительностью приборов, а также неэквивалентностью условий эксперимента, из-за чего большее распространение получили методы восстановления спектров электронов по данным кривым ослабления.

Изложим вкратце суть метода восстановления. Предположим, что пучок электронов имеет некоторую интегральную (за полный импульс напряжения на диоде) функцию распределения по энергиям (спектр)  $f(\varepsilon)$ . Проходя через фильтры из фольги с толщинами  $d_i$ , где  $i$  - номер фольги, интенсивность пучка уменьшается так, что максимальное значение тока за фольгой определяется выражением

$$\int_0^{E_{max}} qv(\varepsilon)f(\varepsilon)\tau(\varepsilon, d_i)d\varepsilon = j_{mi}, \quad (1.11)$$

где значение параметра  $E_{max}$  определяет верхний порог рассматриваемого диапазона энергий,  $\tau(\varepsilon, d_i)$  - коэффициент прохождения моноэнергетического пучка электронов с энергией  $\varepsilon$  через фольгу толщины  $d_i$ . В диапазоне энергий 0.01 – 30 МэВ, для определения коэффициента прохождения электронов сквозь фильтр, используется известная эмпирическая формула Табаты [153]:

$$\tau(\varepsilon, d_i) = \frac{1 + \exp(-s)}{1 + \exp[(s + 2)(d_i/R_{ext}) - s]}, \quad (1.12)$$

где  $s = k_1 \exp(k_2/(1 + 0.042w))$ ,  $k_1 = 10.73/Z^{0.232}$ ,  $k_2 = 0.22/Z^{0.463}$ ,  $w = \varepsilon/(m_0c^2)$  - энергия в единицах энергии покоя электрона ( $m_0c^2 = 0.511$  МэВ),  $R_{ext}$  - экстраполированная длина пробега электронов с энергией  $\varepsilon$  в материале фольги,  $Z$  - атомный номер материала фольги. Для значения экстраполированного пробега электронов в веществе  $R_{ext}$  также использовалась эмпирическая формула [154]:

$$R_{ext} = a_1 \left[ \frac{\ln(1 + a_2w)}{a_2} - \frac{a_3w}{1 + a_4w^{a_5}} \right], \quad (1.13)$$

где  $a_1 = 0.2334A/Z^{1.209}$ ,  $a_2 = 1.78 \cdot 10^{-4}Z$ ,  $a_3 = 0.9891 - 3.01 \cdot 10^{-4}Z$ ,  $a_4 = 1.468 - 1.18 \cdot 10^{-2}Z$ ,  $a_5 = 1.232/Z^{0.109}$ ,  $A$  - атомная масса материала фильтра. Формула (1.13) определяет экстраполированный пробег с погрешностью не более 8.4% для диапазона энергий ниже 1 МэВ.

Совокупность значений  $I_{mi}$  образует кривую ослабления, измеренную для набора анодных фольг различной толщины  $d_i$ . Соответственно, решить задачу восстановления спектра - значит найти решение интегрального уравнения (1.11) относительно неизвестной функции  $f(\varepsilon)$  на интервале  $0 < \varepsilon < E_{max}$ .

Достоинство данного подхода заключается в том, что он позволяет отказаться от необходимости транспортировки и коллимации пучка электронов за анодной фольгой. Впервые для восстановления спектра электронов за анодной фольгой-фильтром применялась упрощённая методика [9, 148], в которой использовалась кривая ослабления количества электронов  $N_i(d_i)$  за  $i$ -м фильтром или максимальной амплитуды тока  $I_{mi}(d_i)$ , регистрируемая за этим фильтром. Кривая максимальной амплитуды тока использовалась в том случае, если форма и временная привязка тока пучка быстрых электронов оставалась неизменной, а менялась только амплитуда тока. Количество электронов  $N_i(d_i)$  рассчитывалось по осциллограммам токам пучка. Далее с помощью

линейной интерполяции каждому значению толщины фильтра  $d_i$  сопоставлялось значение энергии электронов  $\varepsilon_i$ , соответствующее максимальному пробегу электронов в материале анодной фольги, соответствующее толщине  $i$ -го фильтра. Для каждого интервала энергии  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i$  рассчитывалась средняя спектральная плотность электронов -  $\Delta N/\Delta\varepsilon = (N_{i+1} - N_i)/(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i)$ , после чего строилась гистограмма функции распределения электронов по энергиям, т.е. искомый спектр. Так как при данном подходе пренебрегается поглощением в  $i$ -й фольге электронов, которые имеют энергию, большую чем энергия  $\varepsilon_i$ , то такой подход был сочтён недостаточно достоверным. В частности, считалось, что восстановленный спектр получался гораздо более широким и с максимумом, смещённым в низкоэнергетичную часть.

В качестве усовершенствования методики восстановления в работах [149, 155] был предложен другой метод. Он был основан на поиске приближённого решения уравнения (1.11) методом перебора с использованием некоторого количества априорных предположений о максимуме спектральной плотности. Функция распределения представлялась в виде суммы моноэнергетических распределений, далее она подставлялась в дискретизованное представление уравнения (1.11) и находилась относительная невязка правой части интегрального уравнения. Подбор повторялся до тех пор, пока относительная невязка не достигала величины, соизмеримой с погрешностью эксперимента при измерении значений на кривой ослабления. Однако несмотря на кажущиеся улучшения, в [149] было отмечено, что в результате подбора значений интенсивностей моноэнергетических групп электронов по энергиям в ряде случаев получаются несколько вариантов спектров, восстанавливаемых с одинаковой точностью. Все они охватывали одинаковый диапазон энергий  $\varepsilon = [0, E_{max}]$ , но имели различное распределение внутри него.

Следует отдельно отметить, что в научной литературе термины “убегающие” и “быстрые” электроны принято считать синонимами, но автор данной работы придерживался несколько иной терминологии. В работе “убегающими” электронами называются все высокоэнергетичные электроны в объёме газоразрядного промежутка, а термин “быстрые электроны” больше относится только к тем, которые прошли через анодную фольгу.

Наряду с очевидными трудностями, возникающими при экспериментальном изучении параметров потоков убегающих электронов, следует отметить, что данные параметры (ток, полный заряд, спектр) также представляют собой лишь интегральные характеристики быстрых частиц. Подобно интегральному свечению газового разряда в видимом диапазоне, фиксируемые параметры убегающих электронов в таких разрядах несут ограниченную информацию о процессе убегания. Другими словами, они не позволяют ответить на вопрос о том, в какой момент и в какой части газоразрядного



промежутка начинается генерация убегающих электронов и какой энергетический спектральный состав они имеют в определённые моменты времени (мгновенный спектр). Поэтому для детального изучения быстропротекающих электрических разрядов и процессов генерации убегающих электронов в них чаще всего используются теоретические методы моделирования.

### 1.3 Теоретические методы и их недостатки

Основным принципом теоретического моделирования быстропротекающих (наносекундных и субнаносекундных) газовых разрядов является построение нестационарной теоретической модели процессов рождения, гибели и переноса заряженных частиц плазмы разряда в согласованном электромагнитном поле. Последнее является суперпозицией полей движущихся зарядов и внешнего поля, определяемого условиями внешней цепи подключения газоразрядной системы. Силы, которые действуют на заряженные частицы, в основном обусловлены электромагнитными взаимодействиями. Их влияние на заряды в плазме формируется распределением непрерывно-меняющихся макроскопических полей, характеризуемых напряжённостями электрического и магнитного поля задачи. Для быстропротекающего разряда критически важно рассматривать полную систему уравнений, которым подчиняется электромагнитное поле. Такой системой уравнений в классической электродинамике является система уравнений Максвелла. В электрофизической системе, рассматриваемой на характерных временных масштабах порядка 1 нс и меньше, электрические размеры как правило сопоставимы с длительностью импульса приложенного напряжения. Резко-нестационарный характер изменения последнего приводит к тому, что существенно возрастает вклад тока смещения  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  в значение полного тока, определяемого потоками заряженных частиц в макроскопическом поле физической конфигурации задачи. Из-за чего применение уравнения Пуассона, учитывающего вклад только электростатической составляющей в динамику электрического поля, становится недостаточным для точного описания модельной электрофизической системы разряда.

Для моделирования динамики заряженных частиц, движущихся в макроскопическом электромагнитном поле, могут использоваться различные теоретические подходы разной степени фундаментальности и внутренней простоты, которая выражается в использовании набора физических приближений, согласованных между собой особым образом (рисунок 1.5). Плазма газовых разрядов, в том числе и рассматриваемых в данной диссертационной работе, состоит из большого числа нейтральных атомов/молекул газа, положительных и отрицательных ионов, а также электронов. Поскольку ансамбль

всех частиц плазмы разряда представлен отдельными частицами, то наиболее общим и фундаментальным описанием всех процессов было бы микроскопическое моделирование. Оно представляет собой изучение траекторий движения каждой частицы плазмы, движущейся в согласованном электромагнитном поле, создаваемом другими частицами и внешними условиями электрической цепи. Непосредственная математическая формулировка микроскопической модели разряда должна включать колоссальный по величине набор уравнений движения Ньютона-Лоренца, который дополняется уравнениями для динамики электромагнитного поля (уравнениями Максвелла). Хотя рассматриваемая в диссертации плазма газового разряда атмосферного давления является слабоионизованной, максимальная концентрация заряженных частиц в ней может достигать высоких значений порядка  $\sim 10^{13} - 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Исходя из чего легко представить то количество уравнений движения, которое необходимо решить в подобном случае. На практике это неосуществимо.

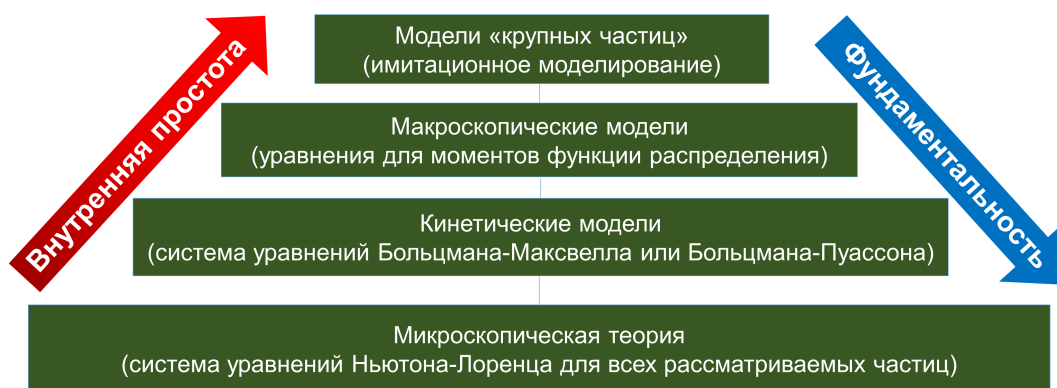


Рисунок 1.5 — Схематическое изображение иерархии теоретических моделей физики плазмы и газового разряда [156].

Тем не менее, некоторые попытки моделирования задач физики плазмы в рамках микроскопических моделей предпринимались. Это делалось для относительно малого числа частиц (реальных и модельных), например, в работе [157], но полученные результаты не отражают реальной физической картины, а служат скорее демонстрацией сложности любой микроскопической модели плазмы. Для описания плазмы в [157] пришлось решить около 150000 обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако даже в таком случае детально описать кулоновские столкновения взаимодействующих частиц не представляется возможным и приходится пользоваться некоторыми аппроксимациями. Отдельной проблемой является необходимость описывать механизмы рождения новых и гибели существующих заряженных частиц, которые меняют массовый баланс системы, приводя, соответственно, к появлению новых степеней свободы и новых уравнений. Исходя из вышесказанного микроскопическое описание может быть применено

для достаточно разреженной плазмы в задачах, не связанных с моделированием пробоя и газовых разрядов, например, для пылевой плазмы [158].

Учитывая сложность реализации микроскопического моделирования, для решения задач физики плазмы и газового разряда существует не менее фундаментальный, однако гораздо более удобный подход основанный на принципах физической кинетики. Здесь основной статистической характеристикой ансамбля частиц является функция распределения, дающая континуальное описание всех частиц одного вида. Для ее определения всё конфигурационное пространство и весь диапазон скоростей частиц разбивается на малые интервалы, такие, чтобы изменением плотности частиц в пределах каждого интервала можно было бы пренебречь. Если количество частиц, приходящихся на каждый интервал, велико, то флуктуации, связанные с их хаотическим движением, будут несущественными. При этом для описания поведения ансамбля правомерно использовать статистически усреднённые значения числа частиц в каждом интервале. Средние значения отношения числа частиц в каждом интервале к самому интервалу и называются функцией распределения  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ . Данный подход заменяет необходимость поиска траекторий движения всех частиц одного типа возможностью описывать динамику распределения частиц заданного типа одной функцией распределения. Функция распределения представляет собой универсальный объект, знание которого позволяет вычислять усреднённые зависимости физических величин (траектории, силы, концентрации и пр.) от координат и времени в виде так называемых *моментов функции распределения*:

$$\bar{N} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \vec{v}, t) \aleph(\vec{x}, \vec{v}) d\vec{v}, \quad (1.14)$$

где  $\aleph$  - некоторая физическая величина.

Функция распределения данного типа частиц  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$  удовлетворяет фундаментальному кинетическому уравнению или уравнению Больцмана [156, 159]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (1.15)$$

где  $\vec{E}$  - напряжённость макроскопического электрического поля,  $\vec{H}$  - напряжённость макроскопического магнитного поля,  $q$  и  $m$  - заряд и масса частицы рассматриваемого типа,  $(\partial f / \partial t)_c$  - скорость изменения функции распределения вследствие столкновений или *интеграл столкновений*. Данное уравнение можно записать для частиц каждого сорта (электронов, ионов, нейтральных частиц). Для установления конкретного вида уравнения необходимо определить в нём поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и интегралы столкновений  $(\partial f / \partial t)_c$ .

Так как поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  могут быть связаны не только с внешними источниками, но и с пространственными зарядами и токами, создаваемыми заряженными частицами плазмы, то их самосогласованное определение требует в общем случае совместного решения уравнений поля (Максвелла), в которых в число источников включены плотности зарядов и плотности токов заряженных частиц, определяемые с помощью соответствующих функций распределения частиц. При этом нужно рассматривать кинетические уравнения и уравнения поля совместно.

Как правило, столкновительный член кинетического уравнения (интеграл столкновений)  $(\partial f/\partial t)_c$  представляет собой сложное интегральное выражение. При учёте столкновительного члена, кинетическое уравнение (1.15) оказывается интегро-дифференциальным, включающим частные производные по всем независимым переменным, а также нелокальные интегральные операторы. Кроме того, в общем случае кинетические уравнения для различных компонент плазмы не являются независимыми. Связь между ними обусловлена тем, что в выражения для столкновительных членов, например, парных взаимодействий входят функции распределения двух сортов частиц. Такая связь очевидна, так как при столкновениях частицы обмениваются энергией и импульсом, что приводит к их взаимному влиянию на распределение по скоростям.

В слабоионизованной плазме газового разряда набор уравнений (1.15), записанных для всех компонент плазмы, а также уравнений, согласованно задающих эволюцию электромагнитного поля системы, образуют замкнутую кинетическую модель разряда. В современной физике плазмы и газового разряда значимость кинетической теории трудно переоценить. Фактически, теория явлений, описываемых кинетическими уравнениями, является связующим звеном между одночастичным описанием в микроскопической теории плазмы и макроскопическим (гидродинамическим) описанием, в котором используется свойство непрерывности таких величин, как плотность, скорость и температура частиц. По сравнению с микроскопическим описанием плазмы, кинетическая теория отказывается от избыточной информации о первоначальном состоянии системы частиц, что является в ней наиболее существенным приближением. При этом сохраняется возможность описывать сильно неравновесные системы заряженных частиц, функции распределения которых значительно отличаются от распределения Максвелла-Больцмана, характеризуемого макроскопическим параметром температуры.

При заданных внешних условиях кинетические уравнения позволяют в принципе найти функции распределения частиц и с их помощью определить все возможные макроскопические характеристики плазмы, записанные в виде моментов функций распределения (1.14). Однако ввиду сложности кинетических уравнений как для аналитического, так и для численного рассмотрения, полное решение уравнения Больцмана

удаётся отыскать только для ограниченного круга задач. С другой стороны во многих задачах физики плазмы и газового разряда для полноценного описания физических процессов и закономерностей между ними достаточно иметь представление о мгновенных распределениях только некоторых макроскопических параметров, например, концентраций заряженных частиц и их средних энергий. Данные величины являются соответствующими моментами функции распределения (1.14). Они представляют собой комбинации компонент координат и скоростей частицы, усредненные по распределению, в виде линейных (моменты первого порядка), квадратичных (моменты второго порядка) и прочих моментов более высокого порядка.

Как уже было отмечено выше, кинетическая теория является связующим звеном между микроскопическим и макроскопическим описаниями плазмы. В большей степени это справедливо из-за того, что существует возможность непосредственно сформулировать набор уравнений, которым подчиняются моменты функции распределения (1.14), тем самым вовсе отказавшись от решения кинетического уравнения (или системы уравнений), и перейти к макроскопическому описанию рассматриваемой системы. Разумеется, данный подход предполагает, что полученная математическая модель будет представлять более упрощённое описание, так как количество задействованных моментов функции распределения всегда будет ограниченным. Начиная с однокомпонентной модели Альфвена, впервые сформулированной в 1940 году, в настоящее время существует несколько различных способов описания динамики моментов функции распределения заряженных частиц. Применение уравнений для описания поведения электронной и ионной компонент плазмы в известном смысле аналогично подходу, используемому в гидродинамике. Поэтому данные уравнения иногда называют уравнениями двухжидкостной гидродинамики плазмы или гидродинамическими уравнениями плазмы [160].

В основе теоретических моделей, включающих макроскопическое описание определённой компоненты плазмы газового разряда или её основной части, в настоящей диссертационной работе используется уравнение для низшего (или нулевого) момента функции распределения. Оно представляет собой уравнение непрерывности для концентрации зарядов и может быть получено посредством интегрирования соответствующего уравнения Больцмана (1.15) по пространству скоростей:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla (\vec{v} n_i) = S_i,$$

где, индекс  $i$  обозначает сорт частиц, а  $S_i$  представляет собой обобщённый источник появления и гибели частиц типа  $i$  в результате столкновений. В более общей форме

данное уравнение можно выразить через поток заряженных частиц  $\vec{\Gamma}_i$  в следующем виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \vec{\Gamma}_i = \sum_j \alpha_j |\vec{\Gamma}_i|, \quad (1.16)$$

где коэффициент  $\alpha_j$  представляет собой константу реакции с номером  $j$  в форме коэффициента Таунсенда.

Вид потока  $\vec{\Gamma}_i$  определяется типом приближения, согласно которому происходит описание движения заряженных частиц в той или иной модели. В макроскопических моделях, изложенных в данной диссертационной работе используется так называемое дрейфово-диффузионное приближение [160], суть которого заключается в том, что мгновенные значения потоков ионов и электронов в заданной точке пространства определяются локальными значениями напряжённости электрического поля и градиентом концентрации рассматриваемых частиц, т.е. в наиболее общем виде (в отсутствии магнитного поля) они представляются в виде:

$$\vec{\Gamma}_i = \pm \mu_i n_i \vec{E} - D_i \nabla n_i, \quad (1.17)$$

где  $\mu_i$  - подвижность и  $D_i$  - коэффициент диффузии частиц. Поскольку средняя энергия частиц зависит от величины электрического поля, то и коэффициенты подвижности и диффузии зависят от поля. Выбор знака перед коэффициентом подвижности зависит от заряда рассматриваемого типа частиц.

Решение вопроса о корректности применимости дрейфово-диффузионного приближения требует отдельного обоснования. Получение точного представления распределения скорости электронов в низкотемпературной плазме имеет первостепенное значение для точного расчёта транспортных коэффициентов для электронов. Это особенно важно в условиях, когда распределение не находится в равновесии с локальным электрическим полем. Данные условия возникают, если для модуля напряжённости электрического поля  $E$  нарушается по крайней мере одно из следующих соотношений

$$\frac{1}{\lambda} \gg \frac{1}{E} \frac{dE}{dx}, v_E \gg \frac{1}{E} \frac{dE}{dt}, \quad (1.18)$$

в котором  $\lambda$  - характерная длина, на которой происходит выравнивание скорости электрона,  $v_E$  - характерная скорость релаксации энергии или импульса [161, 162]. Хорошо известно, что данные условия нарушаются, например, в области катодного падения потенциала тлеющих разрядов [163, 164] или в СВЧ-разрядах [165, 166]. При нарушении условий (1.18) транспортные характеристики электронов приобретают нелокальный характер и дрейфово-диффузионное приближение теряет физический смысл. Характер-

ные масштабы длины релаксации при атмосферных давлениях составляют не более  $\lambda \sim 0.1$  мкм, а размеры прикатодной области тлеющего разряда - не более 10 мкм. Также непосредственно на катоде необходимо учитывать наличие процессов вторичной электронной, автоэлектронной и взрывной эмиссии в зависимости от вида моделируемого физического процесса [131]. Данные факторы значительно усложняют моделирование разряда. Один из подходов, упрощающих расчёты разрядов - это использование нулевого условия Неймана, накладываемого на концентрацию электронов на катоде. Такое условие позволяет исключить из рассмотрения вклады нелокальных процессов в прикатодной области, а также не конкретизировать тип эмиссионных процессов с катода. Разумеется, нулевое условие Неймана допустимо использовать только в тех задачах, где вкладом прикатодных процессов можно пренебречь. Например, для моделирования стримеров и газовых разрядов с сильным перенапряжением, в которых максимальное значение электрического поля достигается на фронте волны ионизации, а не у катода. Ещё одним несомненным достоинством рассматриваемого условия является возможность использования относительно грубой расчётной сетки у катода с минимальным размером элемента большим значения параметра  $\lambda$ . В данной диссертационной работе указанный приём широко используется в качестве основного способа задания механизма прикатодных процессов.

Теоретическая модель, основанная на дрейфово-диффузионном приближении для многокомпонентной плазмы представляет собой набор уравнений непрерывности (1.16) для электронов, положительных и отрицательных ионов с потоками в виде (1.17). При изучении слабоионизованной плазмы и разрядов с неподвижной газовой средой из системы уравнений модели исключаются соответствующие уравнения непрерывности для нейтральных частиц [167]. Для согласованного учёта электростатического или электромагнитного поля данную систему уравнений необходимо дополнить уравнением Пуассона или системой уравнений Максвелла, соответственно.

Данный подход, известный как “жидкостный” или “гидродинамический”, активно применяется для моделирования широкого спектра задач низкотемпературной физики плазмы: для изучения лавин и стримеров [168–172], коронного [173, 174], высокочастотного [175, 176] и барьерного разрядов [177, 178]. Также модели, основанные на уравнениях для низшего момента функции распределения, используются для анализа газовых разрядов в практических и промышленных приложениях, например, [101, 179–183]. Данное детерминистическое описание является доминирующим при макроскопическом теоретическом моделировании плазмы газового разряда. Пользуясь аналогичной техникой преобразования уравнений Больцмана в систему уравнений для отдельных моментов функций распределения, можно получить замкнутые системы уравнений и для

моментов более высоких порядков, которые представляют собой функции плотности энергий, импульсов, температур и прочих физических величин [184]. В ряде случаев расширенные и дополненные модели, которые содержат уравнения высших моментов, дают более точное теоретическое описание моделируемого явления, позволяя, в частности, раздвинуть границы применимости модели с дрейфово-диффузионным приближением (рабочий диапазон давлений газа и температуры электронной компоненты).

Все подобные макроскопические (гидродинамические) модели представляют собой класс теорий, реализующих приближенное усреднённое описание явлений физики плазмы. Данное обстоятельство связано с тем, что поиск моментов функции распределения (1.14) осуществляется интегрированием по всему пространству скоростей (или импульсов), соответствующей физической наблюдаемой величины, умноженной на функцию распределения на фазовом пространстве. В ряде случаев функция распределения реальных частиц может незначительно отличаться от максвелловской, например, наличием дополнительных максимумов в области высоких энергий - такая физическая ситуация реализуется в газовых разрядах высокого давления, где доля убегающих (быстрых) электронов невелика по сравнению с количеством плазменных (не превышает  $10^{-4}$  от общего числа [80]). Тогда попытка гидродинамического описания указанного явления в терминах моментов функции распределения даст нам лишь динамику “медленной” компоненты плазмы, составляющую основную долю частиц.

Принимая во внимание относительную простоту гидродинамического описания плазмы и высокую актуальность исследований явления генерации убегающих электронов, ряд авторов, например [31, 33], неоднократно предпринимал попытки усовершенствовать гидродинамическое описание для того, чтобы получить возможность моделировать потоки убегающих электронов на макроскопическом уровне рассмотрения. С этой целью было предложено использовать многогрупповой подход [33, 185, 186]: искусственно разделить все электроны на группы по энергиям, разбивая интервал интегрирования в формуле (1.14) на несколько фиксированных областей. Количество таких областей может достигать до 100 и более диапазонов энергий. Подобная методология хорошо зарекомендовала себя для расчётов нейтронного поля в ядерных реакторах [187, 188]. В результате деления на группы получалась система уравнений непрерывности для наборов моментов функции распределения электронов каждой энергетической группы, характеризуемой своим значением средней энергии. Таким образом, модель предоставляла возможность вычисления некоего прообраза функции распределения электронов по энергиям, т.к. электроны рассматривались в виде нескольких групп заряженных частиц, подчиняющихся своим уравнениям непрерывности. Многогрупповая методология позволяет обойти проблему расщепления моментов более высокого порядка из-за



того, что границы групп фиксируются, а искомые наблюдаемые величины вычисляются условно в середине каждой группы.

По мнению авторов метода [33], данный подход позволяет естественным образом “сшивать” область электронов высоких энергий с областью дрейфующих электронов низких энергий и получать распределение электронов в области высоких энергий. Однако недостатки многогруппового подхода скрываются как раз в неоднозначности самой процедуры классификации частиц по энергетическим группам, лежащей в основе метода. Как было показано выше, в разделе 1.1, введение понятий критических параметров убегания (критического поля и вероятности убегания) в значительной степени является упрощением, приводящим к неоднозначности корректной оценки таких параметров. Наибольшую сложность многогруппового подхода представляет необходимость априорного задания целого ряда таких слабо определённых физических параметров, как то: число групп электронов, характерных времён размножения убегающих электронов, энергетического порога убегания, зависящего от напряженности поля и прочих. Так, пороговая энергия убегания представляет собой одну из наименее точно определяемых величин, от которой существенно зависят решения системы многогрупповых уравнений. Авторы [147, 186] предлагали различные способы её определения, остановившись в конечном итоге на стохастическом методе, использующем имитационное моделирование Монте-Карло, вносящее дополнительные неопределённости в задачу, решение которой изначально предполагается полностью детерминистическим. Дальнейшее развитие многогруппового подхода продемонстрировало, что возможные вариации слабо определённых параметров критически сказываются на характере получаемого численного решения системы уравнений. Дополнительные степени свободы в модель также могут вносить неопределённости параметров направленной скорости и кинетических коэффициентов для конкретных групп быстрых электронов.

Следствием использования многогруппового метода в работах Л.П. Бабича и соавторов стал целый ряд весьма спорных выводов, некоторые из которых были опровергнуты экспериментально при проведении цикла работ по исследованию пучков убегающих электронов, например, [80]. В первую очередь следует сказать о том, что результаты использования многогруппового подхода показывают нефизически большое количество т.н. “аномальных” электронов, т.е. убегающих электронов с энергиями, значительно превышающими максимальное мгновенное падение напряжения на газоразрядном промежутке (умноженное на заряд электрона). Более того, в [33] утверждается, что почти все электроны в газовом разряде с большим перенапряжением имеют “аномальные” энергии. Теоретические выводы касательно спектрального состава пучка убегающих электронов авторы [33] подтверждают серией экспериментов для разря-

дов в воздухе атмосферного давления и выше. В большинстве экспериментов группы Л.П. Бабича за исключением, возможно, последних (например, [189]) основная часть электронов разряда в плотных газах представлена исключительно “аномальной” компонентой. Проведённый анализ экспериментальных работ автора монографии [33] свидетельствует о том, что измерения спектра убегающих электронов производился путём непосредственной оценки по экстраполированному пробегу (1.13). Как было подробно показано в работах по восстановлению энергетических спектров по данным кривых ослабления [86, 88, 98], методика, подобная [9, 148] является недостоверной из-за преимущественно немонахроматического характера спектра исследуемого пучка.

В целом, несмотря на широкое применение автором [33] многогруппового подхода к моделированию различных явлений, содержащих убегающие электроны, например, для расчёта высотных разрядов, гало, и пр. [33], внутренняя противоречивость метода и недостоверность некоторых получаемых им результатов, по отношению к существующей экспериментальной базе не позволяют брать предлагаемый подход на вооружение для моделирования разрядов высокого давления, генерирующих пучки убегающих электронов.

Особое место в иерархии теоретических подходов к моделированию быстрых разрядов занимает т.н. “метод крупных частиц” (метод “частиц в ячейке”, particle-in-cell или PIC) [34, 35], который широко применяется в настоящее время для моделирования процессов физики плазмы и газового разряда. Данная группа методов представляет собой вариант имитационного моделирование плазмы разряда в терминах динамики ансамбля виртуальных частиц (“макрочастиц”), движущихся в согласованном электромагнитном поле по классическим траекториям, подчиняющимся совокупности дифференциальных уравнений Ньютона-Лоренца. Суть его в том, что в дебаевском приближении [159] усреднённое макроскопическое поле определяет движение сразу многих частиц на характерных пространственных масштабах, соответствующих экранированию зарядов. Это обстоятельство привело к идее наблюдать не за отдельными частицами, а сразу за большими группами частиц, расположенных близко в фазовом пространстве. Такие группы были названы “макрочастицами” (также иногда используется терминология “крупные частицы”, “большие частицы” или “сверхчастицы”).

Для описания в этой модели фазовое пространство в начальный момент времени разбивается на условные ячейки, в каждой из которых, в соответствии с начальной функцией распределения, вычисляется количество крупных частиц (операция взвешивания). Затем заряды и массы всех частиц данного сорта, которые содержатся в одной ячейке, суммируются и полный заряд и масса присваиваются новой модельной частице того же сорта, которая помещается в заданный узел расчётной сетки. Таким образом,

мы получаем не только начальное распределение крупных частиц, а также и начальное значение тока и плотности заряда в каждом узле сетки. Далее электромагнитное поле рассчитывается по имеющимся значениям заряда и тока в узлах сетки. После этого решается система уравнений Ньютона-Максвелла для определения нового положения макрочастиц в фазовом пространстве в следующий момент времени. Затем изменённые заряды частиц снова распределяются по узлам в фазовом пространстве, и процесс повторяется циклически. Включение столкновительных процессов (ионизации, возбуждения, упругого рассеяния) требует реализации вероятностной модели столкновений, основанной на методе Монте-Карло [190].

Сначала 1950-х годов метод крупных частиц использовался в работах по моделированию электронных пучков в вакуумных приборах [191]. По мере освоения и совершенствования метода стало очевидно, что его можно обобщить и для моделирования теплового распределения зарядов противоположных знаков с равной плотностью, т.е. для широкого моделирования процессов в плазме, в том числе для моделирования слабоионизованной плазмы газового разряда. Типичная численная модель плазмы "крупных частиц" включает заряженные макрочастицы обоих знаков, движущихся под действием сил со стороны внешних и собственных полей. Описание разделяется на два шага: расчёт создаваемых макрочастицами электромагнитных полей, и перемещение макрочастиц под действием приложенных к ним электромагнитных сил. По известным координатам и скоростям всех макрочастиц из решения уравнений Максвелла находятся поля, а их движение описывается уравнениями Ньютона—Лоренца. Вычислительная процедура состоит из циклического решения этих двух задач на достаточно малом временном шаге. Для решения уравнений эволюции как электромагнитного поля, так и уравнений движения используются сеточные методы, обеспечивающие максимальную скорость, поскольку число макрочастиц может достигать десятков и сотен миллионов. Переходы между шагами (вычисления полей и координат) сопряжены с необходимостью производить взвешивание, так как плотности зарядов и напряжённости электромагнитного поля определены в дискретных узлах пространственной сетки, а координаты макрочастиц являются непрерывными функциями. Взвешивание представляет собой процедуру интерполяции целевой функции, производимую с заданной точностью и по сеточным узлам, близким к макрочастице. Как правило, в современных реализациях алгоритмов применяется взвешивание высоких порядков, способствующее уменьшению нефизических эффектов, в частности шума, высокий уровень которого неприемлем для многих физических задач.

Метод хорошо зарекомендовал себя для моделирования бесстолкновительной плазмы, в задачах вакуумной электроники и физики электронных пучков [192–196], для

моделирования открытых разрядов [197–199] и периодических плазменных структур [200–202], а также для непосредственного моделирования субнаносекундных разрядов, например, [203–205] и пылевой плазмы [206]. В настоящее время существует большое количество бесплатных [207–209] и коммерческих программных пакетов [210–213], предназначенных для имитационного моделирования как бесстолкновительных процессов, так и плазмы газового разряда.

Отдельная задача, которую необходимо реализовать на каждом шаге вычислительного алгоритма метода макрочастиц, - это учёт процессов упругих и неупругих столкновений электронов с нейтральными частицами газовой среды. Данный узел вычислительного кода основывается на методе Монте-Карло (МСС, Monte-Carlo collisions), который представляет собой описание столкновений в терминах длин свободного пробега, выбираемых случайным образом. В методе макрочастиц реализация метода Монте-Карло [35] построена по цепочке: вычисление сечения - вычисление частоты столкновений - оценка вероятности события для каждого электрона. Однако данный вычислительный сценарий в реальных расчётах претерпевает некоторую модификацию с целью расчётов, например, используется т.н. подход *нуль-столкновений*. Само собой неупругие столкновения электронов с нейтральными атомами и молекулами приводят к лавинообразному росту количества заряженных частиц за счёт ионизации газа. Рост заряженных частиц сопряжён с экспоненциальным ростом количества макрочастиц в модели, что приводит к быстрому возрастанию количества необходимой для хранения переменных оперативной памяти. На сегодняшний день эта проблема представляет одну из наиболее существенных вычислительных трудностей при использовании метода макрочастиц для моделирования разрядов высокого давления. Одним из её решений является объединение нескольких макрочастиц в одну суперчастицу (укрупнение), приводящее к необходимости дополнительного взвешивания ансамбля макрочастиц, имеющих различные веса. Именно этот вычислительный подход является причиной того, что высокоэнергетичные частицы (например, убегаящие электроны) зачастую просто исключаются из рассмотрения, так как их доля мала по сравнению с общим объёмом компонентов плазмы разряда. Подобного недостатка не лишены и схемы расчёта, предназначенные для моделирования чисто бесстолкновительных процессов. Например, для некоторых задач вакуумной электроники существуют физические условия, при которых относительно малая доля реальных частиц (электронов) начинает играть ключевую роль в развитии всего явления. При его описании в терминах динамики макрочастиц, мы неизбежно будем сталкиваться с тем, что объём модельных крупных частиц, соответствующий малой доле реальных, может оказаться равным нулю. В таком случае метод крупных частиц весьма ограниченно можно рассматривать как инстру-

мент, с помощью которого адекватно описываются ансамбли частиц с существенно немаксвелловским распределением по энергиям.

С наиболее фундаментальной позиции полноценное рассмотрение нано- и субнаносекундных газовых разрядов, генерирующих интенсивные потоки убегающих электронов возможно в рамках кинетической теории плазмы. Результатом моделирования в таком случае будет функция распределения всех электронов плазмы разряда, вычисленная во всех точках фазового пространства задачи в определённые моменты времени. Кинетическое описание непротиворечивым образом определяет эволюцию “хвоста” функции распределения, который соответствует одному или нескольким дополнительным максимумам, описывающих малые фракции высокоэнергетичных (убегающих) электронов.

Первые успешные попытки применения кинетического описания разрядов с убегающими электронами были предприняты в работе А.В. Гуревича [133], посвящённой рассмотрению явления пробоя на убегающих электронах и ассоциированных с ним процессов в грозовых атмосферных разрядах. Центральное место в первой работе [133] и последовавших за ней работах [53, 54, 56, 214] занимает построение кинетического уравнения Больцмана с максимально точным интегралом столкновений.

Для точного учёта ионизационных эффектов, особое внимание уделяется формулировке интегралов столкновений, описывающих резерфордское рассеяние быстрых и медленных электронов, а также учёту обменных процессов между этими двумя группами. Ввиду сложности получаемого уравнения, столь точная и исчерпывающая формулировка задачи приводит к тому, что область применимости теории Гуревича ограничивается рассмотрением лишь асимптотического решения данной задачи в слабом однородном электрическом поле. Однородность поля обеспечивает линейность задачи, благодаря чему удаётся отыскать асимптотическое решение для функции распределения  $f$  в виде  $f \sim \exp(\lambda t)$ , где  $t$  - время. Основной задачей, которая решалась в работах А.В. Гуревича было выяснение условий, при которых возможно получить решение со значением параметра  $\lambda > 0$ . В таком случае это означает экспоненциальный рост количества электронов и формирование пробоя на убегающих электронах. Такое асимптотическое решение было получено, в результате чего было сформулировано важнейшее условие пробоя - необходимость существования начального распределения высокоэнергетичных “затравочных” электронов с энергиями, превосходящими “критическую” энергию убегания  $\sim 0.1 - 1$  МэВ. Предполагается, что такие электроны всегда присутствуют благодаря их эффективной генерации в атмосфере за счёт действия космических лучей. Действительно типичная плотность потока вторичных электронов с энергиями свыше 1 МэВ составляет  $10^3 - 10^4$  частиц на кв. метр в секунду.

Очевидным недостатком теории Гуревича является тот факт, что далеко идущие физические выводы о явлении пробоя на убегающих электронах, а также предположения о природе гигантских высотных явлений между грозowymi облаками и ионосферой (также известных как “блю джет” и “спрайт”) делаются только на основании простого асимптотического решения линейного уравнения Больцмана. Такой подход не позволяет получить представление о нестационарной пространственно-временной динамике рассматриваемых процессов. Он также не позволяет рассматривать более широкий круг явлений газоразрядной плазмы, в которых генерация убегающих электронов не связана с развитием пробоя, а дополняет его, как это имеет место в субнаносекундных разрядах в сильных полях. В основном эта ограниченность теории связана с тем, что в работах Гуревича электрическое поле однородное и стационарное, что трудно коррелирует с распределением поля в реальных разрядах. Ещё одним недостатком подобного рассмотрения является высокая сложность постановки задачи, связанная с выбором обобщённых форм для интегралов столкновений. Это обстоятельство исключает возможность применения уравнения Гуревича для рассмотрения реальных лабораторных разрядов, т.к. значительно замедляет процедуру численного решения задачи в согласованном неоднородном и нестационарном электрическом поле.

Также не следует считать имитационное моделирование (метод “крупных частиц”) своеобразным методом решения кинетического уравнения Больцмана. Во-первых, сама функция распределения в методе крупных частиц не является объектом непосредственного поиска, а лишь приближённо “реконструируется” на основании данных о распределении модельных частиц в фазовом пространстве, что не является эквивалентной формулировкой задачи о решении кинетического уравнения. Во-вторых, динамика движения макрочастиц представляет собой стохастический процесс как благодаря использованию модели столкновений по методу Монте-Карло, так и из-за применения взвешивания и укрупнения распределения модельных частиц на каждом дискретном шаге метода. Кинетическое же уравнение описывает поведение непрерывной функции распределения, которая даёт наиболее полное детерминистическое описание ансамбля заряженных частиц. При непосредственном решении уравнения Больцмана расчёт функции распределения может быть детализован со сколь угодно высокой, наперёд заданной точностью, определяемой выбранным численным методом. Имея в распоряжении функцию распределения электронов или ионов в заданный момент времени, можно вычислить необходимые физические величины системы частиц в виде соответствующих моментов функции распределения.

## 1.4 Выводы

На основании сказанного выше можно ещё раз отметить актуальность исследования теоретических проблем динамики быстропротекающих процессов взаимодействия (наносекундных и субнаносекундных временных масштабов) сильно-неоднородных электрических полей с неравновесными потоками электронов в плотных средах газовых разрядов. Данная диссертационная работа в качестве цели ставит перед собой разработку и вычислительную реализацию современных теоретических моделей формирования субнаносекундных электрических разрядов в газах высокого давления и детальное описание процессов взаимодействия электрических полей с электронами в таких газовых разрядах. Реализация данной цели в значительной степени предполагает использование теоретического механизма физической кинетики как наиболее фундаментального подхода для решения задач физики плазмы и газового разряда. В частности, такой теоретический подход обеспечивает возможности вычисления характеристик системы, описываемых “хвостом” функции распределения. С другой стороны, учитывая сложность классической кинетической теории, ассоциированной для плазмы и газовых разрядов с решением уравнения Больцмана, следует в первую очередь рассматривать упрощённые конфигурации, по физическим параметрам (геометрической неоднородности, перенапряжению и пр.) близкие к рассматриваемым в экспериментах. При создании данной работы предполагалось использовать совмещённые (гибридные) теоретические подходы, позволяющие избегать избыточных теоретических построений, осложняющих численные расчёты.

## **Глава 2**

# **Теоретические методы и подходы при описании электродинамических процессов и их реализация на модельных задачах**

Как было показано в обзорной Главе 1, проведение теоретических исследований в рамках макроскопических (гидродинамических) и кинетических моделей сопряжено с поиском решений гетерогенных систем дифференциальных уравнений с частными производными. Так как возможности аналитического или приближённо-аналитического решения подобных уравнений весьма ограничены, то в большинстве случаев речь может идти только о проведении процедуры численного решения на ЭВМ. Уравнения, используемые в математической формулировке макроскопических моделей представляют собой многомерные уравнения движения многокомпонентной “жидкости”, которой в рамках данных моделей является рассматриваемая плазма. Как и для любой задачи гидродинамики, здесь характерно появление внутренних разрывов, ударных волн, контактных неоднородностей и прочих специфических особенностей, которые по своим проявлениям могут быть гораздо более разнообразными чем в классической вычислительной гидродинамике, т.к. нелинейные зависимости параметров потоков частиц определяются локальными значениями электрического поля.



При построении численных решений кинетических моделей в одинаковой степени проявляются как трудности, с которыми сопряжено решение систем дифференциальных уравнений в частных производных общего вида, так и особенности, характерные для постановки краевой задачи уравнения Больцмана или Власова. Высокая размерность решения задачи для функции распределения на фазовом пространстве, существенно различающиеся характерные масштабы столкновительного и бесстолкновительного движения ансамблей заряженных частиц, требования к выполнению законов сохранения для уравнения Власова (транспортной части уравнения Больцмана) - вот неполный перечень особенностей, отличающих кинетическое моделирование от макроскопического в отношении применяемых процедур численного счёта.

Как для кинетических, так и для макроскопических постановок задач зачастую бывает трудно определить: являются ли данные задачи поставленными корректно? Неопределённость в таком важном вопросе может приводить к тому, что малые нерегулярности способны достичь больших величин за сравнительно короткий промежуток времени. Физическое происхождение подобных неустойчивостей неустранимо никаким сгущением разностной сетки задачи. Единственная возможность устранить эту проблему заключается в том, чтобы обеспечить достаточно гладкое представление начальных и граничных форм решений, насколько это допускается физической моделью, исключая введения нерегулярностей в последующие моменты времени.

Данная глава диссертационной работы посвящена последовательному изложению комплекса математических методов, направленных на получение внутренне согласованных численных решений систем уравнений макроскопических и кинетических моделей. Особое внимание уделяется процедуре верификации (тестирования) представленных методов на примерах актуальных физических задач.

## **2.1 Метод восстановления энергетических спектров пучков убегающих электронов по данным кривых ослабления**

### **2.1.1 Общие замечания**

Перед тем, как перейти к последовательному изложению методики построения процедур численного счёта для уравнений макроскопических и кинетических моделей, стоит рассмотреть задачу, стоящую несколько в стороне от вопросов теоретического моделирования разрядных явлений. Её решение направлено на сопоставление результатов моделирования, более подробно изложенных в дальнейших главах диссертации, с име-

ющимися экспериментами по определению энергетического состава пучка убегающих электронов. Ранее (в Главе 1) отмечалось, что для произвольного разряда достаточно просто экспериментально получить кривые поглощения пучка быстрых электронов в фольгах различной толщины. Однако рядом авторов высказывалось предположение о том, что данные кривые имеют столь большой разброс значений, обусловленный систематической погрешностью измерений, что использовать их для “восстановления” энергетического состава, путём непосредственного решения уравнения (1.11) нельзя, так как получающиеся решения сильно зависят от набора априорных предположений о спектре.

Вопреки мнению авторов некоторых статистических методов восстановления спектров [215], явное введение детальной априорной информации о спектре не позволяет строго определить ошибку и информативность эксперимента. Так, априорное задание энергии основной группы убегающих электронов в работе [149] не способствовало улучшению точности восстановления: соотнести положение максимума восстанавливаемого интегрального спектра с конкретным мгновенным значением напряжения на промежутке, строго говоря, было невозможно. Тем не менее, на основании получаемых данной методикой противоречивых результатов было сделано немало серьёзных физических выводов о влиянии вариации фронта импульса напряжения, его амплитуды и формы электродов на спектральный состав генерируемого пучка убегающих электронов. Причина существующего противоречия заключается в том, что математическая задача по восстановлению спектров из интегральных данных о поглощении пучка относится к классу так называемых “некорректных” или “некорректно поставленных” задач. Для её решения требуется иметь дополнительную информацию об основных параметрах восстанавливаемого спектра, например о наличии одного или нескольких максимумов, о характерных энергиях и ширине этих максимумов в спектре и т.п. Не имея подобной информации, из кривых ослабления удаётся более или менее надёжно оценить лишь величину характерной (средней) энергии электронов в пучке, а не реконструировать его полный энергетический спектр.

### **2.1.2 Понятие некорректно поставленной задачи математической физики**

С точки зрения математической физики, задача о восстановлении спектра убегающих электронов представляет собой пример обратной задачи, сформулированной в виде

интегрального уравнения Фредгольма первого рода [216] для искомой функции  $f(s)$ :

$$\int_a^b K(x, s)f(s)ds = u(x), \quad (2.1)$$

где  $K(x, s)$  - ядро интегрального оператора и  $u(x)$  - правая часть уравнения заданные функции, которые хорошо определены и непрерывны в области  $\{a \leq s \leq b, c \leq x \leq d\}$ . Для краткости также обозначим  $\int_a^b K(x, s)f(s)ds \equiv \hat{K}f(s)$ . Если ядро и правая часть уравнения (2.1) определены однозначно, то задача о нахождении решения представляет собой т.н. *корректно поставленную* задачу математической физики, которая может быть решена аналитически или численно традиционными методами без привлечения дополнительного математического аппарата.

Понятие корректности определяется критерием Адамара, которое было впервые сформулировано в связи с желанием выяснить какие именно типы граничных условий наиболее естественны для эллиптических и гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных [217,218]. Для уточнения критерия корректности введём следующие обозначения: правые части уравнения (2.1) и его решения будем считать элементами метрических пространств  $F$  и  $U$  соответственно, т.е.  $u_1, u_2... \in U$  и  $f_1, f_2... \in F$ . Расстояние между элементами пространств будет определяться уклонением (или невязкой) решений и правых частей (2.1) в метрике  $C$  и  $L_2$  соответственно

$$\rho_U(u_1, u_2) = \sqrt{\int_c^d [u_1(x) - u_2(x)]^2 dx}, \quad (2.2)$$

$$\rho_F(f_1, f_2) = \max_{s \in [a, b]} |f_1(s) - f_2(s)|,$$

Согласно [219] задача решения  $f(s)$  из пространства  $F$  по данным  $z$  из пространства  $U$  называется *корректно поставленной на паре метрических пространств*  $(F, U)$ , если выполняются следующие условия:

1. для любого элемента  $u \in U$  существует решение  $z$  из пространства  $F$ ;
2. решение определяется однозначно;
3. задача устойчива на пространствах  $(F, U)$ .

Невыполнение одного из вышеперечисленных условий переводит задачу в класс некорректно поставленных. Долгое время в математической литературе существовала точка зрения, согласно которой всякая задача должна быть корректно поставленной, иначе её

рассмотрение полностью лишено смысла [220]. Осмысленный выбор класса исходных данных  $U$  и выполнение условий 1 и 2 характеризуют математическую определённость задачи, в то время как условие 3 связывается с физической детерминированностью, а также с возможностью использования численных методов для решения данной задачи по имеющимся приближённым исходным данным. В противном случае, если малым возмущениям исходных данных будут соответствовать большие изменения решения, то его физическая интерпретация теряет всякий смысл. Важно понимать, что корректность задачи математической физики может соблюдаться в одной метрике и отсутствовать в другой. В данной диссертационной работе используется метрика  $C$ , характеризующая значение абсолютной ошибки измерения в общей методике физического эксперимента.

Задача восстановления спектра по кривым ослабления является типичным представителем класса некорректных задач из-за её несоответствия третьему пункту критерия Адамара, а именно ввиду того, что правая часть уравнения (2.1) представляет собой набор экспериментально полученных значений точек кривой ослабления, которые всегда содержат ошибки измерения (Рисунок 1.4). Для иллюстрации проблемы предположим, что  $f_1$  - решение уравнения (2.1), тогда функция  $f_2 = f_1 + M \sin(\omega s)$  будет решением уравнения (2.1) со следующей правой частью

$$u_2 = u_1 + N \int_a^b K(x, s) \sin(\omega s) ds,$$

Очевидно, что для любого числа  $N$  при достаточно больших значениях  $\omega$ , невязка правых частей

$$\rho_U(u_1, u_2) = |N| \sqrt{\int_c^d \left[ \int_a^b K(x, s) \sin(\omega s) ds \right]^2 dx},$$

может быть сделана сколь угодно малой, в то время как уклонение решений в метрике  $C$

$$\rho_F(f_1, f_2) = \max_{s \in [a, b]} |N \sin(\omega s)| = |N|,$$

может быть сколь угодно большим. Если невязку решений также как и уклонение правых частей оценивать в метрике  $L_2$ , то получается, что решение уравнения (2.1) будет неустойчивым по отношению к малой вариации правой части

$$\rho_F(f_1, f_2) = |N| \sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{\sin(\omega(b-a)) \cos(\omega(a+b))}{2\omega}}.$$

Возвращаясь к проблеме восстановления спектров по данным кривых ослабления пучков убегающих электронов, мы приходим к необходимости поиска решения уравнения (1.11), правая часть которого ввиду целого ряда условий физического эксперимента всегда определена неточно, из-за чего данная обратная задача и является некорректно поставленной. Её основная трудность заключается не в отыскании решения, согласующегося с имеющимися исходными данными в пределах их флуктуаций, связанных с наличием систематической и/или случайной погрешностей, а наоборот - в обилии таких решений [149].

Адекватный анализ энергетического спектра пучка убегающих электронов важен не только с фундаментальной точки зрения, он востребован широким кругом практических приложений. С другой стороны, доступность экспериментальной методики получения кривых ослабления пучков электронов в металлических фольгах, по сравнению, например, с непосредственным исследованием спектров методами магнитной спектроскопии не вызывает сомнения. Исходя из этого, автором данной диссертационной работы было предложено создать новую методику восстановления спектров быстрых электронов по данным кривых ослабления. Предполагалось, что разрабатываемый метод должен учитывать некорректность рассматриваемой обратной задачи математической физики. Метод также должен позволить получать энергетический спектр быстрых электронов без каких-либо искусственных априорных предположений о форме энергетического распределения и количестве основных спектральных групп.

Кроме того желательно, чтобы используемая методика позволяла бы выбраковывать наборы экспериментальных данных, которые содержат значительные погрешности измерений, которые далеко не всегда можно оценить в практике физического эксперимента. Критерием недостоверности входных данных (кривых ослабления) для процедуры восстановления может выступать некоторый апостериорный индикатор, например, нефизическая особенность получаемой функции распределения электронов.

### 2.1.3 Регуляризация решения уравнения Фредгольма первого рода

Для поиска решений уравнения (1.11) с неточно определённой правой частью, Тихоновым и Арсениным в [219] был предложен алгоритм регуляризации некорректной (по Адамару) задачи. Идея метода состоит в том, чтобы в качестве решения искать функцию  $f_\delta(s)$  из множества  $F_1$  приближённых решений, которая реализует минимум следующего функционала

$$\Phi = \rho_U(\hat{K}f(x), u(x)) + \alpha\Omega[f(x)], \quad (2.3)$$

где  $\rho_U$  - невязка (уклонение) в метрике  $C$ ,  $\alpha$  - малый числовой параметр,  $\Omega[f(x)]$  - стабилизирующий функционал (“регуляризатор”), позволяющий находить решение  $f(s)$  в наиболее общем классе функций, непрерывных вместе с заданным количеством её производных. Если предъявлять к искомой функции распределения требование непрерывности и гладкости, то на  $F_1$ , очевидно, могут быть определены следующие стабилизирующие функционалы

$$\Omega[f] = \int_a^b \left\{ q(s)f(s)^2 + p(s) \left( \frac{df}{ds} \right)^2 \right\} ds, \quad (2.4)$$

где  $q(s)$  и  $p(s)$  - заданные неотрицательные непрерывные функции, для которых выполняется условие  $s \in [a, b]$ ,  $q^2(s) + p^2(s) \neq 0$  и  $p(s) \geq p_0 > 0$ , где  $p_0$  - некоторое число. Функционал (2.4) допускает обобщения, на любой класс гладкости получаемых приближённых решений, однако предложенная ниже формулировка является наименее строгой, т.е. предъявляющей к приближённому решению лишь два априорных требования - непрерывность и гладкость, которые характерны для распределений энергии частиц в немонохроматическом пучке.

Задачу минимизации предложенного функционала (2.3) можно решать прямыми методами, например, методом градиентного спуска или другими методами оптимизации [221, 222], однако удобнее всего непосредственно численно решать уравнение Эйлера [223], которое записано для данного функционала (2.4)

$$\begin{aligned} \alpha \left\{ f(s) - \frac{\partial^2 f(s)}{\partial s^2} \right\} + \int_a^b f(s') \left( \int_c^d K(x, s)K(x, s')dx \right) ds' = \\ = \int_c^d K(x, s)u(x)dx, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где произвольные неотрицательные функции выбраны  $q(s) = p(s) \equiv 1$ . Решение интегродифференциального уравнения (2.5) удовлетворяет одной из следующих четырёх краевых задач:

$$\begin{aligned} f(a) = 0, f(b) = 0, \\ f'(a) = 0, f(b) = 0, \\ f(a) = 0, f'(b) = 0, \\ f'(a) = 0, f'(b) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В том случае, если по смыслу задачи на концах промежутка  $[a, b]$  известны точные значения функции распределения  $f(s)$  или ненулевые значения её производной, то следует искать приближённые решения в классе функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям, которые налагаются на точное граничное значение. В нашем случае, для восстановления спектра быстрых электронов за фольгой-фильтром на границах рассматриваемого интервала энергий мы ограничиваемся условием для нулевых производных функции распределения (2.6).

Для численного решения уравнения Эйлера (2.5) с граничными условиями (2.6) следует перейти к дискретизации уравнения методами конечных разностей. Для удобства дискретизации представим решаемое уравнение в следующем виде

$$\int_a^b \bar{K}(s, t)f(t)dt + \alpha\{f(s) - f''(s)\} = g(s),$$

$$f'(a) = 0, f'(b) = 0, \tag{2.7}$$

$$\bar{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s)K(x, t)dx, \quad g(s) = \int_c^d K(x, s)u(x)dx.$$

где штрихами  $'$  обозначается обыкновенная (полная) производная функции.

Построение численного решения уравнения (2.7) начнём с задания однородной расчётной сетки. Будем считать, что промежуток  $[a, b]$  разбивается на  $n$  равных частей с шагом  $\Delta s = (b - a)/n$ , а промежуток  $[c, d]$  на  $m$  равных частей, имея шаг сетки  $\Delta x = (d - c)/m$ , соответственно. Если брать в качестве узловых точек сетки середины полученных отрезков, то их распределения будут определяться формулами  $s_i = a + \Delta s/2 + (i - 1)\Delta s, i = 1, 2, 3...n$  и  $x_j = c + \Delta x/2 + (j - 1)\Delta x, j = 1, 2, 3...m$ , соответственно.

Заменяя в левой и правой частях уравнения (2.7) интегралы соответствующими интегральными суммами, взятыми по правилам прямоугольников или трапеций, а вторую производную  $f''$  - соответствующей конечной разностью второго порядка точности [224]  $f''(s) \approx (2f_i - f_{i-1} - f_{i+1})/\Delta s^2$ , мы получим конечно-разностный аналог

уравнения (2.7) в виде

$$\sum_{k=1}^n \bar{K}(s_i, t_k) f_k \Delta s + \alpha f_i + \alpha \frac{2f_i - f_{i-1} - f_{i+1}}{\Delta s^2} = g_i, \quad (2.8)$$

$$g_i = \int_c^d K(x, s_i) u(x) dx \approx \sum_{j=1}^m K(x_j, s_i) f(x_j) \Delta x_j,$$

$$\bar{K}(s, t) = \int_c^d K(x, s) K(x, t) dx \approx \sum_{j=1}^m K(x_j, s) K(x_j, t) \Delta x_j,$$

где значения  $\bar{K}(s_i, t_k)$  и  $g_i$  для (1.12) вычисляются с помощью соответствующих квадратурных формул.

Для задания нулевых граничных условий Неймана (2.6) мы также используем конечно-разностную аппроксимацию первой производной, полагая  $f_0 = f_1, i = 1$  и  $f_{n+1} = f_n, i = n$ . Теперь уравнение (2.8) может быть представлено в виде матричного равенства:

$$Bf + \alpha Cf = g, \quad (2.9)$$

где  $g \equiv g_i$  - вектор с компонентами вычисленной правой части (2.8),  $B$  - матрица с элементами  $B_{i,j} = \bar{K}(s_i, t_j) \Delta s$ ,  $C$  - трёхдиагональная матрица оператора второй производной

$$C = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{\Delta s^2}\right) & -\frac{1}{\Delta s^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta s^2} & \left(1 + \frac{2}{\Delta s^2}\right) & -\frac{1}{\Delta s^2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta s^2} & \left(1 + \frac{2}{\Delta s^2}\right) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(1 + \frac{2}{\Delta s^2}\right) & -\frac{1}{\Delta s^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta s^2} & \left(1 + \frac{1}{\Delta s^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача регуляризации (2.5) сводится к численному решению системы линейных алгебраических уравнений. Поскольку матрица системы (2.9) симметрична, то для её решения можно использовать эффективные численные алгоритмы, такие как метод квадратного корня или метод Воеводина. В данной диссертационной работе указанный численный метод был реализован независимо в коммерческих пакетах Waterloo Maple и Mathworks MATLAB. Решение системы (2.9) производилось с использованием встроенных алгоритмов матричной алгебры. Во всех приведённых ниже численных регуляризациях спектра быстрых электронов в качестве ядра интегрального оператора



$\hat{K}$  использовалась эмпирическая зависимость для поглощения моноэнергетичного пучка электронов (1.12) в металлической фольге.

Предложенная методика восстановления спектров электронных пучков по данным кривых ослабления апробировалась при исследовании пучков, генерируемых как в импульсных вакуумных, так и в газонаполненных диодах. В обоих случаях изучались пучки быстрых электронов, генерируемые разрядами наносекундной длительности (по отношению к длительности импульса питающего напряжения).

#### **2.1.4 Спектр электронного пучка вакуумного диода**

Изучение энергетических спектров электронных пучков, формируемых в наносекундных вакуумных диодах интересно тем, что открытым оставался вопрос о существовании электронов с энергией, многократно превышающей приложенное значение напряжения, умноженное на элементарный заряд. Впервые в работе [225] высказываются предположения о физическом механизме этого явления: электроны могут приобретать большую энергию, ускоряясь в нестационарных электрических полях, которые возникают в процессах сжатия шнура плазмы вакуумного разряда. Также ускорение возможно в локализованных электрических полях, создаваемых неустойчивостями шнура плазмы в виде разрывов или перетяжек. Одной из возможных причин появления подобных сильных электрических полей называют внутреннюю неустойчивость вакуумных дуг, зависящую от нестабильности формы катодного пятна на поверхности металла. В ряде работ, например [226], для уточнения спектра пучка электронов за фольгой использовались методы восстановления спектров, основанные на подборе решений, аналогичные приведённым в работе [149]. В свете изложенного выше предложения об использовании метода регуляризации решения некорректной задачи, попытки подбора спектрального распределения и в данном случае повлекут за собой ошибочные выводы о составе электронного спектра, несмотря на то, что они основаны на данных о кривых ослабления с достаточным (субнаносекундным) разрешением. Так появление электронов с “аномальными энергиями” объяснялось неустойчивым токоотбором, неточным определением реального значения амплитуды зарядного напряжения или другими причинами, не связанными с использованием принципиально ошибочной методики обработки данных эксперимента.

Для решения данной проблемы в работе [87] впервые была использована методика восстановления спектров, основанная на регуляризации решения уравнения Фредгольма (2.1) методом Тихонова-Арсенина. При проведении серии экспериментов к малогабаритному генератору импульсных напряжений РАДАН-220 [26, 227] подсоединялась отпаянная электронная трубка (вакуумный диод) ИМА3-150Э [228]. Катоды в

трубках серии ИМА представляют собой полые цилиндры, изготовленные из вольфрамовой фольги, толщиной около 20 мкм. Эмиттирующей поверхностью является кромка цилиндра, обращенная к аноду. Выбор данной геометрии разрядного промежутка и материалов электродов обусловлен режимом самовосстановления катода, работающего в режиме повторений импульсов питающего напряжения, т.к. в процессе работы прибора происходит регенерация микроскопических неровностей на эмиттирующей кромке. Основное назначение данного вакуумного прибора - это промышленная рентгеновская дефектоскопия. Представленный в работе генератор импульсного напряжения РАДАН-220 с волновым сопротивлением зарядной линии 20 Ом создавал в режиме холостого хода на разрядном промежутке импульсы напряжения с амплитудой 250 кВ (по данным работы [229]), длительностью на полувысоте около 2 нс и фронтом 0.5 нс при согласованной нагрузке линии. Электронная трубка с выходным окном из бериллиевой фольги диаметром 15 мм подключалась к генератору с минимальной индуктивностью. Передняя часть экспериментальной установки ускорителя с электронной трубкой ИМАЗ-150Э изображена на рисунке 2.1.

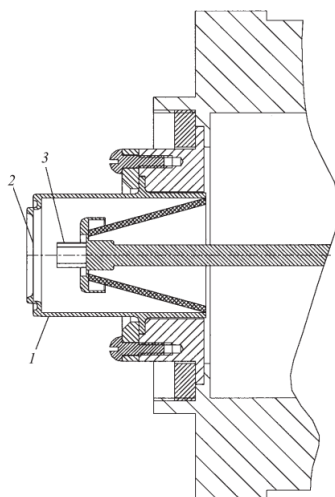


Рисунок 2.1 — Часть экспериментальной установки, подключаемая к РАДАН-220, для изучения характеристики электронных пучков вакуумного диода: 1 - вакуумный диод ИМАЗ-150Э, 2 - бериллиевая фольга, 3 - трубчатый катод.

Ток электронного пучка измерялся датчиком тока с шунтом на основе чип-резисторов сопротивлением 2.7 Ом, присоединённым к дисковому коллектору электронов, и коллекторным датчиком тока на основе коаксиальной линии с характеристическим сопротивлением 50  $\Omega$ . Временное разрешение шунта и коллекторного датчика тока составляло 0.1 нс. Между коллектором и выходным окном был атмосферный воздух. При построении кривой ослабления пучок электронов проходил через алюминиевый фильтр, состоящий из набора фольг толщиной 15 мкм каждая. Максимальная толщина фильтра в экспериментах достигала 345 мкм. Для каждой толщины фильтра производилось 20

импульсов и определялось среднее значение заряда или амплитуды тока коллектора за фильтром. При толщине алюминиевого фильтра 315 мкм разброс амплитуды тока пучка и заряда за фильтром сильно увеличивался от импульса к импульсу. В части импульсов регистрировались токи с малыми амплитудами (на уровне электромагнитной наводки). В этих условиях число импульсов для получения одной точки увеличивалось, а при расчёте средних значений учитывались только импульсы с достаточно большими амплитудами. В экспериментах использовался также фильтр из медной фольги толщиной 100 мкм. Для измерения электрических сигналов использовался цифровой осциллограф Tektronix TDS6604 (6 ГГц, 20 Гс/с).

Для отсечки электронов, выходящих из ускорителя под большими углами, между трубкой и алюминиевым фильтром на оси системы устанавливалась диафрагма из меди толщиной 1 мм с диаметром отверстия 5 мм. Для проверки коллимирующего эффекта диафрагмы фиксировался автограф пучка, полученный на расстоянии 1 см за плоскостью диафрагмы. Оценка угла расходимости электронного пучка за диафрагмой показала, что для основной доли электронов пучка этот угол  $\leq 10^\circ$ . Импульс тока электронного пучка, выходящий из вакуумного диода через бериллиевое окно без использования диафрагмы, приведён на рисунке 2.2. Максимальная амплитуда тока вакуумного диода составила 0.6 кА. Максимальная плотность тока пучка при напряжении генератора в 250 кВ регистрировалась в центре фольги.

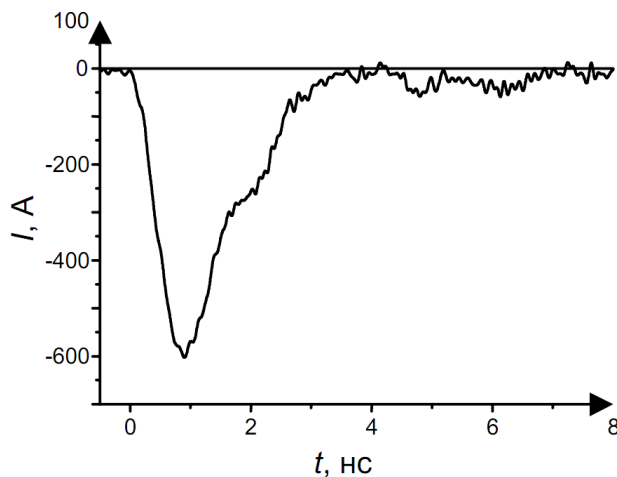


Рисунок 2.2 — Осциллограмма тока коллектора (полный ток электронного пучка за бериллиевой фольгой).

Следуя методике, изложенной в [226], для того чтобы узнать, в какой момент времени генерируются электроны с высокой энергией, регистрируемые за фильтрами большой толщины, электронный пучок пропускался через медную фольгу толщиной 0.1 мм с диаметром отверстия 1 мм по центру пучка. Таким образом было показано [87], что электроны с высокой энергией возникают уже на фронте импульса тока пучка и пере-

стают регистрироваться через 1 нс. Длительность импульса тока электронов с высокой энергией на полувывоте импульса при увеличении толщины фильтра уменьшалась.

Для восстановления спектра электронного пучка была использована кривая ослабления заряда пучка на рисунке 2.3, значения которой регистрировались шунтом в зависимости от толщины алюминиевого фильтра (получены при установке коллимирующей диафрагмы с диаметром отверстия 5 мм). Восстановление проводилось путём численного решения уравнения (2.7) в соответствии с вышеописанной методикой и в предположении о непрерывности и гладкости спектра электронов в диапазоне энергий от 50 до 500 кэВ. Других предположений, касающихся неотрицательности функции спектральной плотности, количества и примерного положения максимумов в спектре, кроме стандартных условий на границах интервала энергий (2.6), не делалось. В результате решения можно было формально получить функции  $f(\varepsilon)$ , например принимающие отрицательные значения в указанном интервале. Естественно, подобные решения не имели бы физического смысла, поэтому неотрицательность решения была одним из критериев правильной работы метода и индикатором умеренного уровня систематических и случайных погрешностей при измерении кривой ослабления.

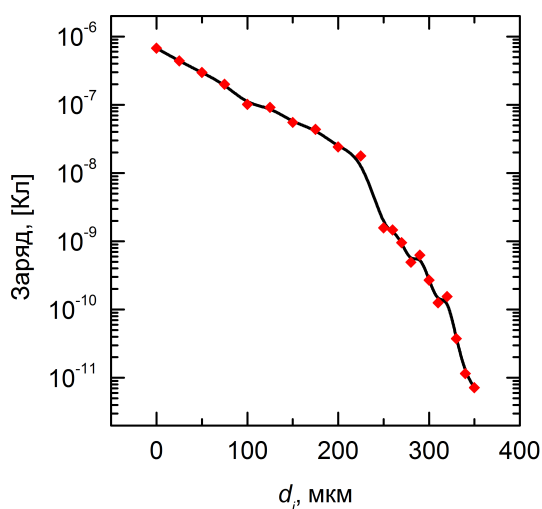


Рисунок 2.3 — Экспериментальная зависимость среднего (за импульс) заряда электронов на коллекторе от толщины алюминиевого фильтра.

Восстановленные спектры изображены на рисунке 2.4. Предварительно, для верификации метода, был восстановлен не только спектр электронов на выходе из электронной трубки, но и его формальная трансформация после прохождения алюминиевых фольг с толщинами 15, 30 и 45 мкм, соответственно. Эти формальные спектры 2,3,4 были восстановлены исходя из тех же данных по ослаблению, только при расчёте нового спектра каждый раз в исходных данных бралось на одну экспериментальную точку меньше. Например, формально допускалось, что вторая и последующие точки на гра-

фиге 2.3 соответствуют фольге на 15 мкм тоньше, чем она была на самом деле. Первая отброшенная точка отвечала бы отсутствию фольги вообще. В результате чего получали новую кривую ослабления, которая имела бы место, если бы на входе был электронный пучок, прошедший не только выходное окно электронной трубки, но и фольгу толщиной 15 мкм. Таким методом был получен спектр, обозначенный кривой 1 на рисунке 2.4. Затем можно было проделать другой расчёт, убирая две, три и более экспериментальных точек. На рисунке 2.4 показаны четыре спектра, которые восстановлены таким образом. Как видно, все рассчитанные спектры не содержат отрицательных значений, что достигается правильным выбором параметра  $\alpha$  в (2.7), который соответствует уровню систематической погрешности экспериментальной техники, использованной в измерениях [87].

Анализ полученного спектра (кривой 1 на рисунке 2.4) показывает, что в падающем на фильтр пучке можно условно выделить две группы электронов: основную низкоэнергетичную, характеризующуюся монотонным спадом энергий до 200 кэВ, и высокоэнергетичную, максимум распределения которой соответствует энергии 220 кэВ. “Хвост” же распределения простирается вплоть до энергий порядка 320 кэВ. Ширина спектра электронного пучка хорошо согласуется с данными акустических измерений спектра электронов ускорителя РАДАН-220, приведенными в [229], а энергия, соответствующая максимуму спектра электронов, – с данными работы [226], которые получены подбором решения (2.1) с априорными предположениями о структуре спектра.

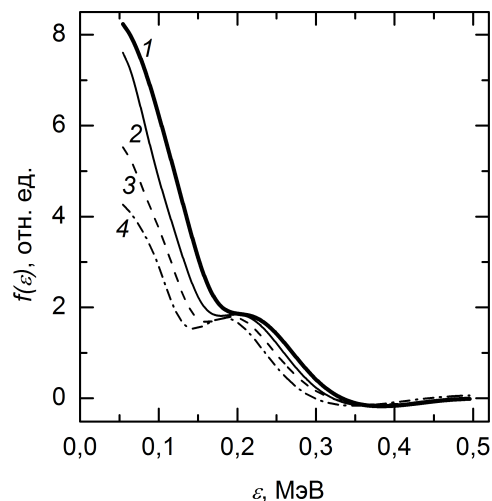


Рисунок 2.4 — Восстановленный спектр электронного пучка: 1 - на выходе из ускорителя; 2 – эффективный спектр после 15 мкм фольги; 3 – после 30 мкм фольги; 4 – после 45 мкм фольги.

Здесь следует заметить, что достоверным спектром, отвечающим физически корректному эксперименту, среди них является только спектр, обозначенный кривой 1.

Остальные спектры приводятся для демонстрации хорошей работы метода восстановления. Они не могут считаться достоверными из-за того, что после прохождения первой фольги электронный пучок значительно рассеивается по углам и его условия прохождения через последующие фольги уже не отвечают ортогональному падению, которое предполагается в работах [153, 154] при расчёте коэффициента (1.12). Тем не менее, относительное уменьшение количества низкоэнергетичных электронов и заметное смещение максимума спектра высокоэнергетичных электронов в область более низких энергий по мере прохождения им все более толстых фольг правильно отражает физику рассматриваемого явления.

Таким образом, можно констатировать, что способ восстановления спектра короткого электронного пучка выкуумного диода по его ослаблению в фольгах различной толщины путем решения некорректной задачи методом регуляризации Тихонова даёт физически обоснованные и однозначные результаты при минимальных априорных предположениях. Впервые достоверно показано, что спектр наносекундного электронного пучка от генератора РАДАН-220 с электронной трубкой ИМАЗ-150Э содержит две выраженных группы электронов: низкоэнергетичную (энергия менее 200 кэВ) и высокоэнергетичную (максимум при энергии около 220 кэВ). Максимальные энергии электронов достигают 320 кэВ. Благодаря предложенной методике восстановления, факт регистрации электронов с энергиями, превосходящими амплитуду импульса напряжения диода на холостом ходу достоверно установлен, что подтверждает экспериментальную гипотезу, высказанную ранее в работе [229].

На основании проведённых измерений можно полагать, что сравнительно малочисленная группа высокоэнергетичных электронов формируется в диоде на переднем фронте импульса напряжения. Статистический разброс крутизны переднего фронта напряжения от импульса к импульсу приводит к определённым флуктуациям количества быстрых электронов в “хвосте” спектра. Затем в промежутке формируется основной ток электронного пучка, и диод последовательно проходит режимы от холостого хода до замыкания межэлектродного пространства пучком. Важно отметить, что часть низкоэнергетичных электронов в восстановленном спектре обусловлена ионизацией газа электронным пучком на пути между диодом и фильтром из фольги.

### **2.1.5 Спектр пучка быстрых электронов газового диода**

Основное назначение методики [87], впервые применённой для восстановления спектров быстрых электронов, генерируемых в вакуумном разряде, заключается в исследовании процессов, происходящих в газовых промежутках при высоких напряжениях электрического поля, для которых характерны субнаносекундные времена

протекания процессов. Короткие длительности существенно усложняют измерения параметров пучка убегающих электронов и рентгеновского излучения. Многие методики измерений находятся еще в стадии разработки, поскольку сами измерения часто производятся на пределе разрешения используемой измерительной техники. Результаты экспериментальных работ очень часто существенно различаются, например, амплитуды тока пучка, полученные на подобных установках в работах [15] и [189]. Также следует отметить, что условия эксперимента и конструкции газовых диодов оказывают сильное влияние на параметры пучка и, соответственно, на параметры генерируемого рентгеновского излучения.

Как отмечалось в работе [23], все указанные факторы приводит к значительной систематической и случайной ошибкам, возникающим в физических экспериментах по измерению значений кривых ослабления пучка убегающих электронов. Согласно современным теоретическим представлениям о некорректных задачах математической физики, все вышеперечисленные факторы, вносящие ошибку в измерение правой части уравнения (1.11), приводят к возникновению множества спектральных распределений, в той или иной степени считающихся экспериментально достоверными [9, 148, 149, 155], если пренебрегать методикой регуляризации решений.

Впервые восстановление спектра по кривым ослабления для пучков убегающих электронов в разрядах высокого давления путём регуляризации Тихонова (2.5) было проведено в работах [86, 88, 113, 114]. В работе [86] к высоковольтному генератору СЛЭП-150М [15, 230] подключался газовый диод осесимметричной конструкции, схематическое изображение которого приведено на рисунке 2.5. Генератор СЛЭП-150М производил импульсы напряжения амплитудой  $\sim 150$  кВ на высокоомной нагрузке. На уровне 0.1 – 0.9 длительность переднего фронта импульса была равна  $\sim 250$  пс при длительности импульса на половине высоты амплитуды около  $\sim 1$  нс.

Как и работе [15], газовый диод на рисунке 2.5 представлял собой двухэлектродную систему, состоящую из плоского анода, выполненного из металлической фольги для регистрации пучка убегающих электронов коллектором тока, и катода в виде острия, благодаря которому в прикатодной области создаётся значительное усиление электрического поля. В качестве катода выступали трубка с диаметром 6 – 28 мм и толщиной стенки 100 мкм из нержавеющей стали, а также стальной шарик диаметром 9.5 мм, закреплённый на металлическом стержне центрального проводника передающей линии высоковольтного генератора. Плоский анод был сделан из алюминиевой фольги толщиной 10 – 15 мкм, отстоящей от катода на расстоянии порядка 20 мм.

Для регистрации тока быстрых электронов за фольгированным анодом использовались токовые коллекторы с апертурами 9, 15, 20 и 56 мм. Временное разрешение

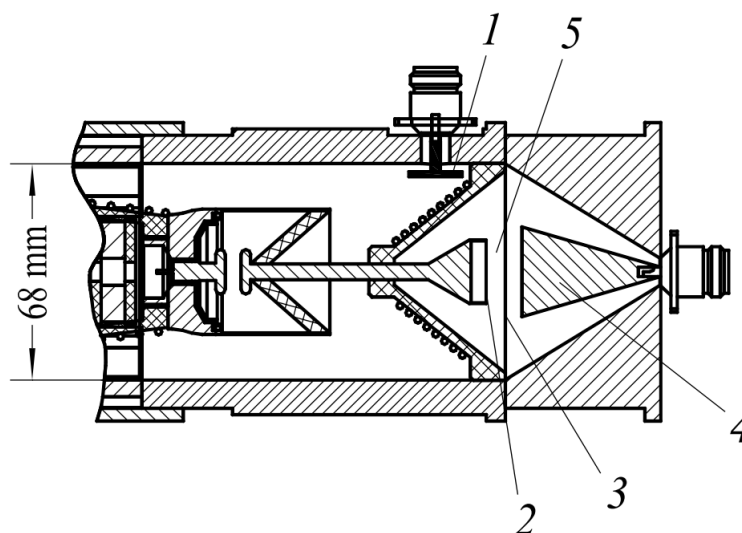


Рисунок 2.5 — Схематическое изображение функциональной части генератора СЛЭП-150М с газовым диодом и токовым коллектором: 1 - ёмкостный делитель, 2 - трубчатый катод, 3 - анодная фольга, 4 - коллектор.

коллекторов и измерительного тракта экспериментальной установки не превышало 0.1 нс. Сигналы с коллектора регистрировались цифровым осциллографом реального времени Tektronix DPO70604 с рабочей полосой 6 ГГц и максимальной выборкой 25 млрд. отсчётов в секунду. Также для регистрации импульса напряжения на диоде с ёмкостного делителя напряжения использовался осциллограф Tektronix TDS6604В с полосой 6 ГГц и максимальной выборкой 20 млрд. отсчётов в секунду. Ток разряда измерялся на шунте, выполненном в виде чип-резистора. Типичные формы импульса тока, напряжения на газовом диоде и тока пучка убегающих электронов изображены на рисунке 2.6.

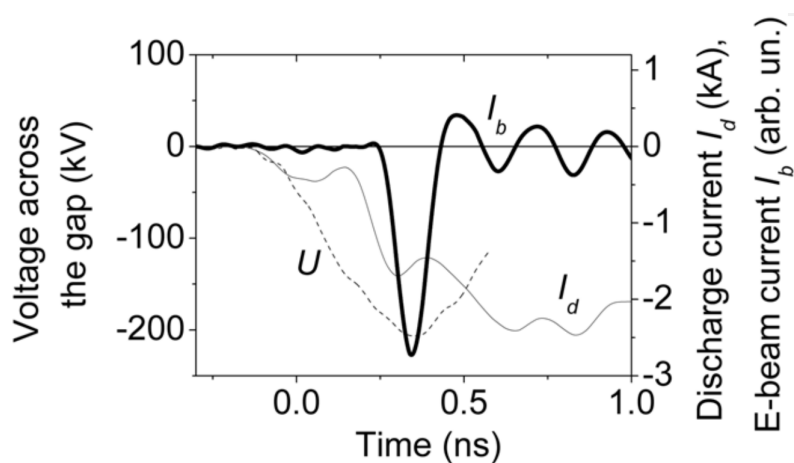


Рисунок 2.6 — Осциллограммы импульсов напряжения на промежутке  $U$ , тока через промежуток  $I_d$  и тока пучка  $I_b$  для шарового катода при напряжении на промежутке  $\sim 210$  кВ.



В результате измерений [86], для шарового и трубчатого катодов были получены кривые ослабления тока убегающих электронов, приходящего на коллектор для анода, изготовленного из алюминиевых фольг, толщины которых изменялись в диапазоне 10 – 400 мкм. Так как амплитуда тока от импульса к импульсу для фольги одинаковой толщины варьировалась, то каждая точка экспериментальных кривых ослабления на рисунке 2.7 представляет собой усреднённое значение за десять импульсов напряжения.

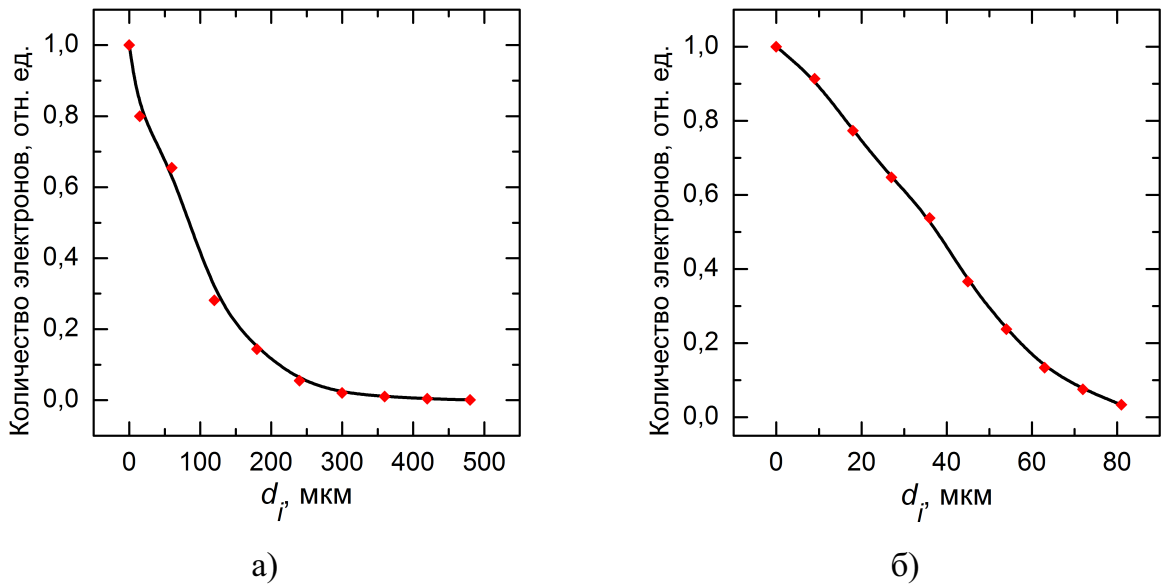


Рисунок 2.7 — Экспериментальные кривые ослабления для шарового (а) и трубчатого (б) катодов газового диода.

Для проведения процедуры восстановления интегральных спектров пучков убегающих электронов, каждый набор экспериментальных точек обеих кривых ослабления интерполировался сплайн-интерполяцией (би-сплайн, изображён сплошной линией на рисунках 2.7) для увеличения количества точек до требуемого в процедуре регуляризации. Диапазон энергий пучка, задаваемый при восстановлении, соответствовал области значений ядра интегрального уравнения (1.12).

На рисунке 2.8 представлены восстановленные по кривым ослабления 2.7 интегральные спектры пучков убегающих электронов, генерируемых газовыми диодами с шаровым катодом (диаметр 9.5 мм) и трубчатым катодом (диаметр 28 мм). Зазор между катодом и анодом составлял 8 мм. В обоих случаях спектр представлен несколькими энергетическими группами, которые выделяются благодаря заданному разрешению метода регуляризации, определяемому данными кривых ослабления и параметром регуляризации  $\alpha$ . Последний параметр определяет точность восстановления спектра по отношению к экспериментальным данным кривой ослабления. Значение  $\alpha$  последовательно уменьшалось для повышения точности реконструкции. Как и для вакуумного

диода, при таком подходе критерием выбора минимально возможного значения параметра  $\alpha$ , т.е. максимальной точности восстановления спектра, является неотрицательность получаемой функции плотности. При неоправданно низких значениях  $\alpha$  в “хвосте” функции распределения появляются отрицательные значения, что свидетельствует о достижении предельной точности восстановления спектра для заданной кривой ослабления.

Возвращаясь к вопросу о спектральном составе пучка убегающих электронов можно отметить, что количество электронов с высокими энергиями увеличивается с ростом фактора неоднородности катода. Данное явление объясняется значительным ростом абсолютного значения электрического поля вблизи поверхности электрода с малым радиусом кривизны. Значение максимального напряжения на диоде со сферическим катодом также выше измеренного для диода с трубчатым катодом. Спектр пучка быстрых электронов, генерируемый диодом со сферическим катодом содержит около  $\sim 10\%$  так называемых электронов с “аномальными” энергиями, превышающими максимальное напряжение на диоде, которое составляет  $\sim 220$  кВ.

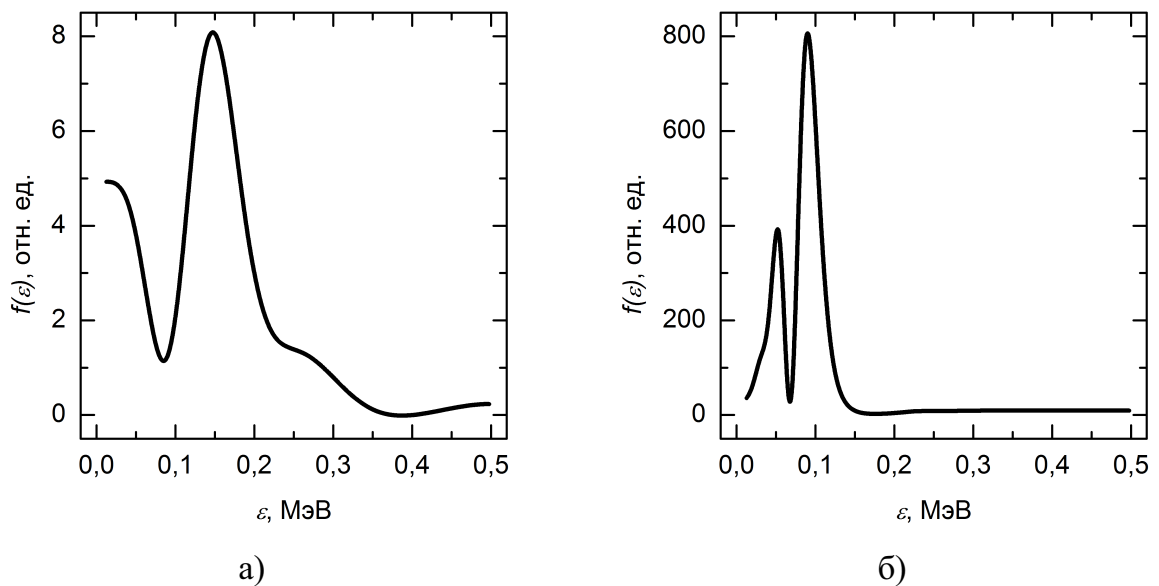


Рисунок 2.8 — Реконструированный спектр быстрых электронов для шарового (а) и трубчатого (б) катодов газового диода.

В работах [86, 113] отмечается, что замена катода на тонкую иглу приводит существенному уменьшению как амплитуды, так и средней энергии пучка убегающих электронов. Трубка диаметром 28 мм, среди использованных в работе катодов, даёт наибольшее количество быстрых электронов за фольгой ( $\sim 1.5 \cdot 10^{10}$  частиц за импульс), однако количество “аномальных” электронов полностью отсутствуют. Результаты восстановления спектра быстрых электронов за фольгой для диода с катодом сферической

формы дополнительно подкреплялись результатами времяпролётной спектрометрии. Для измерений спектра использовалась схема подключения времяпролётного спектрометра, изображённая на рисунке 1.2.

Для сферического катода время задержки между моментом приложения импульса напряжения к диоду и началом генерации пучка убегающих электронов варьируется от импульса к импульсу, как и амплитудное значение тока пучка. Для проведения количественной оценки в [86] выбирались минимальные времена задержки по отношению к времени нарастания напряжения на ёмкостном делителе. На рисунке 2.9 показаны импульсы тока коллектора за анодной фольгой и тока коллектора после прохождения электронным пучком спектрометрического канала (рисунок 1.2). Расстояние между анодной фольгой и торцом спектрометрического канала составляла 92 мм (амплитуда импульса для наглядности увеличена в пять раз). Время пролёта основной группы электронов составляла  $\sim 480$  пс, что соответствует кинетической энергии порядка  $\sim 160$  кэВ. Данное значение близко к положению основного пика спектрального распределения восстановленного по данным кривой ослабления на рисунке 2.8 (а). Такое экспериментальное согласие можно считать хорошим если учесть, что интегральный спектр на рисунке 2.8 (а) реконструируется путём усреднения по десяти импульсам напряжения, а времяпролётный спектрометр определяет энергию электрона за один импульс.

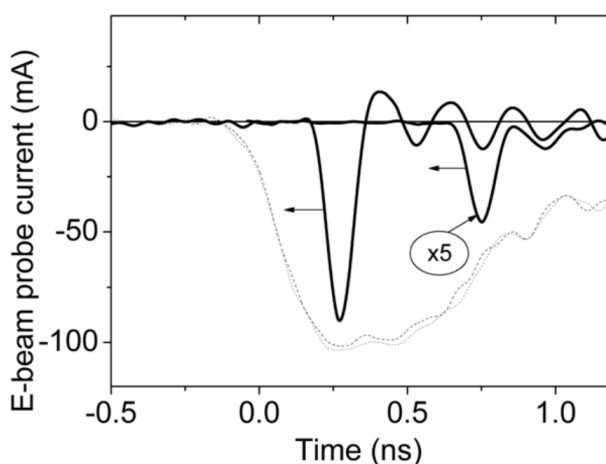


Рисунок 2.9 — Профили тока для двух вариантов расположения коллектора: коллектор расположен непосредственно за анодной фольгой и на расстоянии 92 мм от неё.

В целом, результаты на рисунке 2.9 представляют собой измерения части спектра пучка электронов, которые подтверждают результаты восстановления методом регуляризации Тихонова-Арсенина. Времяпролётная спектрометрия пучка в работах [86, 113, 114] из-за высокого уровня шумов и низкого уровня регистрируемого сигнала достоверно позволила определить скорости только двух групп спектрального распределения. По-

ложение коллектора вблизи анодной фольги даёт при измерении более зашумлённый сигнал по сравнению с его удалённым расположением. Здесь трудность использования осциллографов реального времени сопряжена с низким соотношением сигнал-шум, которое лимитируется разрядностью аналого-цифровых преобразователей прибора. Поэтому низкоэнергетический пик спектра быстрых электронов определяется достовернее, чем высокоэнергетическая часть. Обнаружение аномальной части восстановленного спектра на рисунке 2.8 методами времяпролётной спектрометрии из-за низкого уровня сигнала представляется ненадёжным. Общий недостаток времяпролётной спектрометрии также сопряжён с низкой достоверностью осциллографирования сигналов коллектора, получаемых на пределе возможностей используемых цифровых осциллографов реального времени.

## **2.2 Методы численного решения уравнений макроскопических моделей разряда**

В макроскопической теории дифференциальное уравнение в частных производных (1.16) представляет собой обобщённый вариант уравнения переноса, т.е. гиперболического уравнения математической физики. В некоторых зарубежных литературных источниках уравнение (1.16) также получило название уравнения типа “реакции-конвекции-диффузии” (reaction-advection-diffusion). Вследствие нелинейности решение обобщённого уравнения переноса или систем этих уравнений является гораздо более сложной задачей, нежели решение других типов уравнений в частных производных [231]. Тип нелинейного уравнения переноса наиболее тесно связан со спецификой вычислительных задач газо- и гидродинамики. Для решения данных задач математической физики, описываемых гиперболическими уравнениями, характерна следующая особенность: одновременно решение может быть гладким в одной области определения и разрывным в другой области. Разрывные составляющие решения могут возникать из гладких начальных данных. Далее будет показано, что так, например, возникает волна ионизации в задаче о развитии разряда в нормальных условиях, где начальные условия однородны. Подобные особенности решений предъявляют к алгоритмам численного решения уравнений переноса, как и гиперболических систем уравнений в целом, весьма противоречивые требования. С одной стороны, применяемый численный алгоритм с достаточной точностью должен сохранять свойство монотонности там, где решения могут иметь значительные перепады (фронты ударных волн). С другой стороны, метод должен обеспечивать высокий порядок точности в областях гладкого решения. На

основании теоремы Годунова о пределе порядка [232], эти два требования в рамках линейных разностных схем не могут быть удовлетворены одновременно.

Существует ряд мер, которые широко применяются в настоящее время для преодоления ограничений, накладываемых теоремой Годунова. Одним из путей решения сложившегося противоречия является применение разностных алгоритмов с выделением разрывов (shock-fitting methods) [233, 234]. Данный круг численных методов основан на непосредственном выделении (или “улавливании”) разрывов, которые возникают при численном решении уравнения гиперболического типа. Процедура выделения осуществляется путём построения пространственной сетки, ассоциированной с конкретными разрывами. Однако метод выделения разрывов позволяет на практике выделить только некоторые основные разрывы, особенно если речь идёт о двумерных и трёхмерных моделях. Существует также альтернативный способ выделения разрывов, который принято называть методом плавающих разрывов [231]. Он представляет собой динамическую разновидность вышеупомянутого алгоритма. Другими словами, он направлен на обнаружение возникающих разрывов решения с целью сделать их потом границами областей гладкого решения. Методы данной группы становятся неэффективными в тех случаях, когда число разрывов начинает увеличиваться с течением времени. Это приводит к существенному замедлению численного счёта на некотором этапе решения.

Другим путём является использование методов “сквозного счёта” (shock-capturing methods), которые допускают аппроксимацию производных через разрывы. Здесь разрыв сглаживается на интервале с характерными размерами, задаваемыми параметрами диссипации схемы, а затем трансформируется в локализованный диапазон резкого перепада значений сеточных функций. При увеличении порядка точности схемы, ширина такого диапазона перепадов обычно уменьшается. Использование процедуры сквозного счёта страдает от нефизических осцилляций, возникающих в областях больших перепадов значений решения. Данные артефакты решения, в свою очередь, требуется устранять применением дополнительных процедур. Для этого можно использовать искусственные численные приёмы, например, введение линейной или квадратичной искусственной вязкости (диссипации) [235].

На сегодняшний день наиболее перспективными численными алгоритмами для решения гиперболических уравнений являются схемы переменного порядка точности (ранее называемые также “гибридными”). Теоретическая сторона гибридных методов претерпела значительные изменения, направленные на устранение определённых внутренних противоречий, и в настоящее время все методы данной группы основаны на едином принципе кусочно-полиномиального восстановления значений решения в узлах вычислительной сетки, которые удовлетворяют условию неувеличения полной

вариации (свойству TVD - total variation diminishing и его разнообразным обобщениям). Современное состояние алгоритмов TVD подготовило почву для создания многочисленных модификаций метода, в частности, в данной диссертационной работе использована схема WENO третьего и пятого порядков точности [236], широко применяемая в гидро- и газодинамике. Разработка данной методики существенно повысило точность получаемых численных решений по сравнению с традиционными разностными схемами фиксированного порядка точности, а также со схемами выделения разрывов.

В специфике решения уравнений типа (1.16) существуют также и серьёзные отличия от гиперболических уравнений гидродинамики: уравнения вида (1.16) содержат конвективное слагаемое, описывающее дрейфовое движение, а также диффузионный член и источник заряженных частиц. Все три процесса, соответствующие данным компонентам уравнения, имеют характерные времена протекания, которые значительно разнятся, вплоть до нескольких порядков величины. Кроме того, характерные времена конвективных и диффузионных процессов, а равно и генерации частиц также зависят от времени и координаты точки в пространстве. Стабильность и точность численного метода определяется величиной временного шага, которая должна быть выбрана по крайней мере на порядок меньше минимального характерного времени релаксации самого быстропротекающего процесса. В ряде случаев, при использовании явных схем численного решения, размер временного шага многократно уменьшается для сохранения заданной точности пошагового решения, что значительно замедляет процедуру расчёта. Остановимся подробнее на совокупности методов численного счёта, используемых для решения систем уравнений переноса в данной диссертационной работе.

### 2.2.1 Метод линий

При решении уравнения непрерывности или систем, состоящих из таких уравнений, в настоящее время используется наиболее общий подход, который получил в литературе название “метода линий” (method of lines) [237]. Основная его идея заключается в замене пространственных производных их алгебраическими аппроксимациями в рассматриваемом уравнении или системе уравнений в частных производных. Сама замена может быть осуществлена с использованием различных подходов: методов конечных разностей, конечных объёмов и/или конечных элементов. В результате дифференциальное уравнение в частных производных преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, определяемыми задачей Коши для первоначального уравнения.

Проиллюстрируем процедуру дискретизации на примере одномерного линейного уравнения переноса в декартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

в котором  $u(x, t)$  - зависимая переменная,  $v$  - постоянная величина,  $x \in [a, b]$  - пространственная переменная,  $t$  - временная переменная. Будем считать, что для (2.10) заданы следующие начальные и граничные условия

$$u(x, t = 0) = f(x), \quad u(x = a, t) = g(t).$$

Разобьём область определения пространственной переменной  $[a, b]$  на  $M$  точек так, чтобы индекс  $i = 1$  определял левую границу  $x = a$ , а  $i = M$  - правую  $x = b$ , и применим метод конечных разностей [235] к разложению пространственной производной, представляя её, например, в виде отношения конечных разностей второго порядка точности  $\partial u / \partial x \approx (u_{i+1} - u_{i-1}) / 2\Delta x$ , где  $\Delta x$  - расстояние между соседними точками разбиения промежутка  $[a, b]$ . В результате мы получим следующие соотношения

$$\frac{du_i}{dt} = -v \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}, \quad (2.11)$$

которые представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $u_i(t)$  одной переменной. Данный пример показывает математическую суть метода линий, сводящего решение дифференциального уравнения с частными производными к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для такой системы (2.11) начальные и граничные условия формулируются органически, на основании условий, предъявляемых к (2.10):

$$u_i(t = 0) = f(x_i), \quad u_1 = g(t). \quad (2.12)$$

После дискретизации (2.10) и определения аппроксимации граничных и начальных условий для него, мы получаем систему дифференциальных уравнений в полных производных, точнее в общем случае, систему дифференциально-алгебраических уравнений (2.11)-(2.12). Основным достоинством метода линий является возможность численного решения получившейся системы с использованием библиотечных методов высокой точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Другими словами, вместо использования простейшего явного метода Эйлера (первого порядка точности) для дискретизации временной производной в (2.11), можно использовать методы

Рунге-Кутты 4 – 5 или 7 – 8 порядков точности [221], либо неявные методы обратного дифференцирования (backward differentiation formulas) [238, 239] или обобщённого-альфа (generalized- $\alpha$ ) [240]. Последние не имеют ограничений связанных с величиной временного шага, которые присутствуют в простых явных методах (Эйлера или методах типа “предсказание-корректировка”) из-за фундаментального ограничения, накладываемого критерием Куранта-Фридрихса-Леви [241]. В рамках данной диссертационной работы расчёты методом линий реализуется в программной среде Mathworks MATLAB, где в качестве встроенных библиотечных процедур для решения систем дифференциальных уравнений используются функции ode15s и ode45, которые представляют собой неявный метод обратного дифференцирования и метод Рунге-Кутты-Фельберга 4 – 5 порядков точности, соответственно.

В качестве примера применения метода линий к задаче физики плазмы, рассмотрим непосредственную дискретизацию одномерного уравнения непрерывности концентрации электронов, записанного в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ \mu_e n_e E_r + D_e \frac{\partial n_e}{\partial r} \right] \right) = S(n_e, E_r), \quad (2.13)$$

где  $r$  - радиальная координата,  $n_e \equiv n_e(r, t)$  - концентрация электронов,  $E_r \equiv E_r(r, t)$  - радиальная компонента напряжённости электрического поля,  $\mu_e$  и  $D_e$  - постоянные величины подвижности электронов и коэффициента диффузии,  $S(n_e, E_r)$  - источник ионизационного размножения электронов в общем виде, который может быть записан через коэффициент Таунсенда или константу реакции.

Поскольку решение уравнения (2.13) зависит только от одной пространственной переменной, значение которой лежит в некотором диапазоне значений  $r \in [r_c, r_a]$ , где  $r_c$  и  $r_a$  - радиусы коаксиальных электродов (катода и анода) в задаче, то дискретизация методом линий начинается с выбора типа дискретизации расчётного пространства. Для этого определяется сеточное разбиение диапазона пространственной координаты задачи.

Выбор сеточного разбиения является важным этапом, предвещающим применение метода линий для конкретной геометрии рассматриваемой проблемы. В данной диссертационной работе из большого разнообразия возможностей сеточного разбиения счётного пространства используются только равномерные и квазиравномерные сетки. Равномерной принято называть такую сетку, все шаги которой одинаковы. Пример равномерной сетки приводился выше, когда рассматривался пример линейного уравнения непрерывности. Чаще всего равномерные сетки используются при тестировании численных алгоритмов и/или преимущественно в простых задачах, уравнения которых



сформулированы в декартовых координатах. Недостаток равномерных сеток заключается в том, что один и тот же шаг сетки используется как вблизи неоднородностей геометрии, порождающих, например, разрывы решения, так и в области, где решение либо достаточно однородно, либо вообще не изменяется со временем. Использование равномерной сетки для последующей дискретизации уравнения (2.13) нерационально, так как в рассматриваемой физической проблеме внутренний электрод (катод) имеет гораздо меньший радиус кривизны, чем анод. Соответственно, при достаточно малом шаге сетки использование памяти для хранения решения будет избыточным, однако такая сетка позволит хорошо детализировать прикатодную область. При крупном шаге равномерной сетки численное решение задачи будет иметь значительную погрешность вблизи катода, что, учитывая специфику процессов, происходящих в прикатодной области, может привести к нефизическому виду получаемого решения, либо к расходимости численной схемы. Сгущение равномерной сетки всегда ограничено уменьшением её шага, что в ряде случаев скорее приводит к появлению ошибок округления, нежели к рекуррентному повышению порядка точности. В качестве альтернативы использованию равномерных сеток для задач со сложной геометрией обычно предлагается использовать *квазиравномерные сетки*.

Для того, чтобы кратко пояснить, что представляет собой квазиравномерная сетка, предположим, что по переменной  $\xi$  на отрезке  $[a, b]$  построена равномерная сетка, состоящая из  $N$  интервалов:

$$\xi_n = a + \frac{b-a}{N}n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2.14)$$

которой некоторое преобразование  $x(\xi)$  ставит в соответствие некоторую сетку  $\Omega \equiv x(\xi_n)$ . Если преобразование  $x(\xi)$  обладает следующими свойствами:

- достаточно гладко, т.е. существует достаточно много непрерывных ограниченных производных  $|x^{(q)}(\xi)| \leq M_q, \quad q = 0, 1, \dots, p, \quad p \geq 1;$
  - строго монотонно  $x'(\xi) \geq m > 0;$
  - выполняет преобразование равномерной сетки в сетку  $\Omega$ ,
- то сетка  $\Omega$  называется *квазиравномерной* [242].

Для одномерных задач в цилиндрической или сферической системе координат, например, для широко используемого в диссертации уравнения (2.13) удобно применять квазиравномерную сетку, которая наиболее густая вблизи левой границы  $r = r_c$ , но вблизи правой границы  $r = r_a$  может быть достаточно редкой. Квазиравномерная сетка

с такими свойствами легко задаётся следующим преобразованием:

$$x(\xi) = r_c + (r_a - r_c) \frac{e^{c\xi} - 1}{e^c - 1}, \quad c > 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (2.15)$$

где  $c$  - это управляющий параметр, увеличение которого приводит к сгущению шагов сетки вблизи левой границы. Легко убедиться, что (2.15) удовлетворяет всем свойствам квазиравномерной сетки.

Ниже приводится ещё одно преобразование, позволяющее задавать квазиравномерную сетку со свойствами, аналогичными предыдущей, но имеющую иную функциональную зависимость:

$$x(\xi) = r_c + (r_a - r_c) \frac{(c - 1)^m \xi}{(c - \xi)^m}, \quad c > 1, \quad m > 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (2.16)$$

Сравнение двух данных квазиравномерных сеток показывает, что качественно аналогичные сеточные разбиения возможно построить с помощью различающихся по виду преобразований.

Для декартовых координат использование равномерной сетки более оправдано, однако для улучшения сходимости применяемых численных методов и повышения производительности расчётов, и в этом случае часто приходится прибегать к использованию сеток с квазиравномерными распределениями. Дискретизацию уравнений переноса в декартовых координатах удобнее всего производить на квазиравномерной сетке, условно состоящий из трёх частей: двух узких областей сильного сгущения сетки вблизи обеих границ области  $x \in [0, L]$ , и промежуточной области относительно разреженного сеточного разбиения:

$$x(\xi) = \frac{L}{2} + \frac{c\xi}{\sqrt{1 + d\xi^2}}, \quad c > 0, \quad d > 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (2.17)$$

где  $c$  и  $d$  - управляющие параметры разбиения.

Для подбора параметров  $c$  и  $d$  следует наложить два условия. Первое задаёт границу рассматриваемой области, для чего мы полагаем  $x(1) = L$ . Второе условие определяет параметры приграничных слоёв, каждый из которых имеет толщину  $a$ , таким образом  $x(\xi_*) = L/2 - a$ , где  $\xi_*$  - некоторое число в диапазоне  $0 \leq \xi_* \leq 1$ . Данное условие означает, что общее число интервалов сетки распределяется следующим образом: доля  $\xi_*$  - в центральном слое и  $(1 - \xi_*)/2$  - в каждом приграничном слое. Таким образом

значения параметров  $c$  и  $d$  будут следующими:

$$c = \frac{L(L-a)}{4\xi_*} \left[ \frac{1 - \xi_*^2}{a(L-a)} \right]^{1/2}, \quad d = \frac{(L-2a)^2 - 4b^2\xi_*^2}{4a(L-a)\xi_*^2}$$

Все три формы квазиравномерного сеточного разбиения оптимальны для одномерных задач в декартовых, цилиндрических или сферических координатах, поскольку используемые преобразования имеют бесконечно много непрерывных производных и легко реализуются программно.

При заданном сеточном разбиении счётного интервала радиальной переменной  $r \in [r_c, r_a]$  дискретизации уравнения (2.13) методом линий будет иметь вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dn_i}{dt} - [\nabla\Gamma]_i = S_i, \quad (2.18)$$

где индекс типа частиц (здесь - электронов) опущен для простоты, индекс  $i$  нумерует уравнения  $i = 1..M$ ,  $S_i$  представляет собой функцию источника, вычисленную в узлах сетки, а слагаемое  $[\nabla\Gamma]_i$  дискретное значение аппроксимируемой дивергенции дрейфово-диффузионного потока. Для ионной компоненты (или компонент в случае наличия нескольких типов ионов) плазмы дискретизация уравнения непрерывности имеет аналогичный вид.

Следующим шагом построения численного алгоритма решения уравнений непрерывности является выбор процедуры дальнейшей дискретизации уравнения (2.18), то есть формы приближенного представления дивергенции потока. Из многообразия методов в расчётах макроскопических одномерных моделей использовалось два метода: метод конечных разностей и метод конечных объёмов. Последний аппроксимирует интегральные следствия гиперболических уравнений, выражающих соответствующие законы сохранения в дивергентной форме. В этом случае схема обеспечивает точное выполнение данных законов внутри расчетной области, даже несмотря на возникающие ошибки аппроксимаций. Методы же конечных разностей аппроксимируют целевую систему уравнений, записанную в исходной дифференциальной форме.

## 2.2.2 Метод конечных разностей

Метод конечных разностей (finite-difference scheme) представляет собой один из наиболее хорошо проработанных, универсальных и широко применяемых численных методов для решения уравнений математической физики различных видов. Суть метода заключается в том, что после того, как на рассчитываемую область нанесена сетка с

узлами (например, задаваемая формулами (2.15) или (2.16)), все производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, аппроксимируются отношениями конечных разностей, полученными по формулам численного дифференцирования заданного порядка точности. Таким образом, они выражаются через неизвестные узловые значения искомых функций решения. В результате мы приходим к системе дифференциально-алгебраических уравнений для узловых значений функции. Решение этой системы с последующей интерполяцией функции в промежутках между узлами позволяет в конечном счёте получить приближённое решение рассматриваемой задачи.

Большим преимуществом метода конечных разностей является независимость общей методологии от типа геометрии задачи, вида граничных и начальных условий - это обуславливает широкую универсальность метода для решения различных прикладных задач. Недостатком подхода является высокий порядок получаемых систем дифференциально-алгебраических уравнений (уравнений метода линий). Численное решение подобных систем в ряде случаев требует применение специальных трудоёмких процедур. Также к характерным недостаткам метода конечных разностей можно отнести трудности при описании граничных условий смешанного типа (Робена) и при рассмотрении многосвязных областей и контактных поверхностей. Однако в данной диссертационной работе исследуются только одномерные системы уравнений переноса, для которых указанные недостатки метода конечных разностей не характерны.

Поскольку в уравнениях метода линий (2.18) дивергенция потока представляет собой выражение, содержащее первую и вторую пространственные производные, то удобнее всего записать конечно-разностную форму для первой производной в виде оператора. Пусть дана функция  $f(x)$ , определённая на неоднородной сетке  $x_i, i = 1..M$  в виде  $f_i = f(x_i)$ , тогда её первая производная может быть приближённо заменена (с точностью до второго порядка малости величины) отношением конечных разностей:

$$f'(x_i) \approx a_i f_{i-1} + b_i f_i + c_i f_{i+1}, i = 1..M \quad (2.19)$$

где  $a, b, c$  - постоянные коэффициенты, определяемые сеткой задачи.

Внутри рассматриваемого интервала, в задачах данной диссертационной работы, используются центральные разности. Другими словами, используются приближённые формулы (2.19), в которых производные в узлах сетки вычисляются на основании значений функции в соседних узлах. Обычно для решения уравнений переноса, в том числе и в более общих случаях, предпочтительнее выбирать схемы с так называемыми противопоточными разностями [243, 244]. Однако для достаточно густого сеточного разбиения, которое легко обеспечить практически в любой одномерной зада-

че (2.13), центральные разности дадут более высокий порядок точности при низком уровне численных артефактов, получаемых при использовании схем с центральными разностями.

Значения коэффициентов конечно-разностного разложения (2.19) даются различными выражениями для точек в середине рассматриваемой области определения функции  $f(x)$  и на границах области. Согласно [245], в середине интервала  $i = 2..M - 1$  коэффициенты разложения даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{x_{i+1} - x_i}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}, \\ b_i &= \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}, \\ c_i &= \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Лагранжевая интерполяция для левой границы  $i = 1$  интервала даёт следующие коэффициенты

$$a_1 = -\frac{2\Delta x_1 - \Delta x_2}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)}, b_1 = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1 \Delta x_2}, c_1 = -\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (2.21)$$

для разложения производной  $f'(x_1) \approx a_1 f_1 + b_1 f_2 + c_1 f_3$ , где  $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ ,  $\Delta x_2 = x_3 - x_2$ .

Аналогичным образом может быть получена аппроксимация первой производной на правой границе рассматриваемой области определения при  $i = M$ . Она определяется следующими коэффициентами

$$\begin{aligned} a_M &= \frac{\Delta x_M}{\Delta x_{M-1}(\Delta x_{M-1} + \Delta x_M)}, \\ b_M &= -\frac{\Delta x_M + \Delta x_{M-1}}{\Delta x_M \Delta x_{M-1}}, \\ c_M &= -\frac{2\Delta x_M + \Delta x_{M-1}}{\Delta x_M(\Delta x_M + \Delta x_{M-1})}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

разложения производной  $f'(x_M) \approx a_M f_{M-2} + b_M f_{M-1} + c_M f_M$ , где  $\Delta x_M = x_M - x_{M-1}$ ,  $\Delta x_{M-1} = x_{M-1} - x_{M-2}$ .

Полученные коэффициенты разложения (2.20), (2.21) и (2.22) составляют элементы квадратной разреженной матрицы  $D_{ij}^{(1)}$  оператора дифференцирования  $\hat{D}^{(1)}$  функции  $f$

на неоднородной сетке

$$\hat{D}^{(1)} f = \sum_{i=1}^M D_{ij}^{(1)} f_i =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_M & b_M & c_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{M-1} \\ f_M \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Используя данную выше формулу (2.23), аппроксимирующую первую производную по трём соседним узловым точкам, одномерное осесимметричное уравнение непрерывности (2.13) преобразуется в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (система уравнений метода линий)

$$\frac{dn_{ei}}{dt} - \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(1)} \left( r_j \mu_e n_{ej} E_{rj} + D_e \sum_{j'=1}^M D_{jj'}^{(1)} n_{ej'} \right) = S_i. \quad (2.24)$$

Система уравнений метода линий (2.24) решается численно с использованием библиотечных функций для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом совокупность значений

$$n_{ei}(t=0) = n_{0i}, \quad i = 1..M \quad (2.25)$$

определяет начальные условия пространственного распределения искомой концентрации электронной компоненты плазмы разряда. В зависимости от физических условий на катоде и аноде для  $i = 1$  и  $i = M$  соответствующие уравнения (2.24) могут заменяться граничными условиями

$$n_{e1}(t) = f_1(t), \quad n_{eM}(t) = f_M(t). \quad (2.26)$$

Дискретизация уравнений модели путём перехода к системе уравнения метода линий всегда является многозначной операцией. Корректность того или иного подхода определяется сходимостью полученной численной схемы. Так, при получении конечно-разностного аналога уравнения (2.13), т.е. формулы (2.24), выше использовался оператор (2.23), реализующий трёхточечную аппроксимацию первой производной функции. Другим распространённым способом конечно-разностной дискретизации части

уравнения (2.13), включающей пространственные производные, является выделение слагаемых первой и второй производных в явном виде. Для этого целевое уравнение, с учётом того, что коэффициент диффузии  $D_e$  не зависит явно от координаты, тождественно преобразуется в следующую форму

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \mu_e n_e E_r) - \frac{1}{r} \cdot D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial r^2} = S(n_e, E_r), \quad (2.27)$$

содержащее слагаемые с первой и второй пространственными производными. Его дискретизация методом конечных разностей, соответственно, принимает форму

$$\frac{dn_{ei}}{dt} - \frac{1}{r_i} \cdot \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(1)} (r_j \mu_e n_{ej} E_{rj}) - \frac{D_e}{r_i} \cdot \sum_{j'=1}^M D_{ij'}^{(2)} n_{ej'} = S_i, \quad (2.28)$$

где  $D_{ij}^{(2)}$  представляет собой матрицу оператора второй пространственной производной функции  $\hat{D}^{(2)} f$  на неоднородной сетке. Вид матрицы  $D_{ij}^{(2)}$ , как и  $D_{ij}^{(1)}$  определяется типом и точностью конечно-разностного разложения второй производной. В случае, если достаточно ограничиться точностью второго порядка, аналогично (2.19), вторая производная представляется трёхточечной аппроксимацией [245]:

$$f''(x_i) \approx \tilde{a}_i f_{i-1} + \tilde{b}_i f_i + \tilde{c}_i f_{i+1}, \quad i = 1..M, \quad (2.29)$$

где  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  - постоянные коэффициенты, как и в случае первой производной определяемые сеткой задачи следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= \frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})}, \\ \tilde{b}_i &= \frac{2}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}, \\ \tilde{c}_i &= \frac{2}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

В данном случае, представление второй производной функции на неоднородной сетке имеет отличия от аналогичного представления первой производной. Для сохранения заданного (второго) порядка точности на границах рассматриваемой области определения функции  $f(x)$  используется четырёхточечная аппроксимация, а не трёхточечная как в случае с первой производной. В частности, для точки  $i = 1$  применяется противопоточное разложение (дифференцирование “вперёд”)

$$f''(x_1) \approx \tilde{a}_1 f_1 + \tilde{b}_1 f_2 + \tilde{c}_1 f_3 + \tilde{d}_1 f_4, \quad (2.31)$$

в котором коэффициенты разложения даются формулами

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_1 &= -\frac{6\Delta x_1 + 4\Delta x_2 + 2\Delta x_3}{\Delta x_1(\Delta x_1 + \Delta x_2)(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3)}, \\
\tilde{b}_1 &= \frac{4\Delta x_1 + 4\Delta x_2 + 2\Delta x_3}{\Delta x_1\Delta x_2(\Delta x_2 + \Delta x_3)}, \\
\tilde{c}_1 &= \frac{4\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + 2\Delta x_3}{(\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_2\Delta x_3}, \\
\tilde{d}_1 &= \frac{4\Delta x_1 + 2\Delta x_2}{(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3)(\Delta x_2 + \Delta x_3)\Delta x_3},
\end{aligned} \tag{2.32}$$

где  $\Delta x_1 = x_2 - x_1$ ,  $\Delta x_2 = x_3 - x_2$ ,  $\Delta x_3 = x_4 - x_3$ .

Аналогичным образом выполняется аппроксимация производной в правой крайней точке промежутка. В данном случае используется разложение дифференцированием “назад”, имеющее вид

$$f''(x_M) \approx \tilde{a}_M f_{M-3} + \tilde{b}_M f_{M-2} + \tilde{c}_M f_{M-1} + \tilde{d}_M f_M, \tag{2.33}$$

где коэффициенты разложения даются формулами

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_M &= -\frac{4\Delta x_M + 2\Delta x_{M-1}}{\Delta x_{M-2}(\Delta x_{M-2} + \Delta x_{M-1})(\Delta x_{M-2} + \Delta x_{M-1} + \Delta x_M)}, \\
\tilde{b}_M &= \frac{4\Delta x_M + 2\Delta x_{M-1} + 2\Delta x_{M-2}}{\Delta x_M\Delta x_{M-1}(\Delta x_{M-1} + \Delta x_M)}, \\
\tilde{c}_M &= -\frac{4\Delta x_M + 4\Delta x_{M-1} + 2\Delta x_{M-2}}{(\Delta x_{M-1} + \Delta x_{M-2})\Delta x_{M-1}\Delta x_M}, \\
\tilde{d}_M &= \frac{6\Delta x_M + 4\Delta x_{M-1} + 2\Delta x_{M-2}}{(\Delta x_M + \Delta x_{M-1} + \Delta x_{M-2})(\Delta x_M + \Delta x_{M-1})\Delta x_M},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

где  $\Delta x_M = x_M - x_{M-1}$ ,  $\Delta x_{M-1} = x_{M-1} - x_{M-2}$ ,  $\Delta x_{M-2} = x_{M-2} - x_{M-3}$ .

Полученная в работе [245] аппроксимация второй производной аналогичным образом (2.23) также представима в матричном виде, эквивалентном произведению матрицы оператора на вектор-столбец функции  $f(x) \equiv f_i$

$$\begin{aligned}
\hat{D}^{(2)} f &= \sum_{i=1}^M D_{ij}^{(2)} f_i = \\
&= \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{d}_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_3 & \tilde{b}_3 & \tilde{c}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{M-1} & \tilde{b}_{M-1} & \tilde{c}_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_M & \tilde{b}_M & \tilde{c}_M & \tilde{d}_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{M-1} \\ f_M \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$



Как отмечалось выше, современное состояние развития численного метода линий предполагает использование алгоритмов высокого порядка точности для решения получающихся систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, в качестве таковых используются методы Рунге-Кутты-Фельберга 4–5 и 7–8 порядков или неявные методы обратного дифференцирование (BDF) переменного порядка [221, 238, 239]. Библиотечные процедуры, реализующие данные методы включают расширенные возможности контроля относительной и абсолютной ошибки решения во временной области. Для этого на каждом шаге решателя вычисляется ошибка  $e_i$ , для которой должно выполняться условие

$$|e_i| \leq \max(\epsilon_{rel}|f_i|, \epsilon_{abs}),$$

где  $\epsilon_{rel}$  - максимальная относительная и  $\epsilon_{abs}$  - максимальная абсолютная значения ошибок решателя, задаваемые в качестве входных параметров при решении.

Исходя из того, что относительная ошибка при решении уравнений переноса методом линий обычно задаётся на уровне 0.1 – 0.01%, можно утверждать, что это обеспечивает использование достаточно малых временных шагов. Как правило, переменный шаг по времени всегда много меньше значений, допустимых критерием Куранта-Фридрихса-Леви для явных схем [241]. Если используется неявная схема решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений метода линий, то контроль размера шага по времени используется лишь для достижения заданных значений абсолютной и относительной ошибок, поскольку неявные методы демонстрируют абсолютную сходимость. В данной диссертационной работе для решения систем метода линий предпочтение отдаётся библиотечной функции неявного метода `ode15s` [246], реализованной в системе инженерных расчётов Mathworks MATLAB. Такой выбор обусловлен тем, что как правило метод линий всегда приводит к “жестким” (stiff) системам дифференциальных уравнений. Решение уравнений или систем уравнений данного класса явными численными методами (Эйлера, Рунге-Кутты, Адамса-Башфорта) является низкопродуктивным из-за резкого увеличения количества временных шагов при условии высокой предъявляемой точности, либо из-за резкого возрастания погрешности (так называемого, “взрыва погрешности”) при недостаточно малом временном шаге. Для “жестких” систем неявные методы дают несравненно лучший результат, чем обуславливается использование процедуры `ode15s` в данной диссертационной работе.

Благодаря применению надёжных алгоритмов решения систем уравнений метода линий, вопросы точности и сходимости получающегося решения в большей степени касаются корректности конечно-разностного представления дифференциальных опе-

раторов на выбранной пространственной квазиоднородной сетке. В таком случае, для улучшения сходимости задачи применяются уточнения, которые получили в литературе названия  $h$ - и  $p$ -refinement [237,247]. Первый термин обозначает сгущение сеточного разбиения при сохранении неизменным порядка аппроксимации производных, например, использование только второго порядка точности (2.19) и (2.29). В данном случае параметр  $h$  представляет собой принятое в литературе обозначение шага пространственной сетки задачи. Изменение порядка аппроксимации численного дифференцирования называется  $p$ -refinement. В большинстве случаев, не существует какого-либо конкретного рецепта подбора параметров сетки и порядка точности представления производных, который бы однозначно обеспечивал стабильность получаемого численного решения при заданной точности. В каждом конкретном расчёте цель заключается в достижении заданной границы глобальной погрешности численного счёта при минимальном возможном времени исполнении алгоритма [247–249].

В данной диссертации для решения уравнений типа (2.27) применяются аппроксимации производных отношением центральных конечных разностей второго порядка точности (2.23), (2.35) на сеточных разбиениях, сгущение которых достигается изменением управляющих параметров в формулах (2.15), (2.16) и (2.17). Целый ряд вычислительных задач физики плазмы, газового разряда и физики полупроводников успешно решаются благодаря применению только данного подхода, без обращения к более сложным численным техникам. Однако существуют задачи, в которых градиенты решений столь высоки, что метод конечных разностей на стационарных сетках оказывается малоэффективным из-за возникновения разного рода нефизических особенностей получаемого решения, например осцилляций с нарастающей амплитудой [231] на фронте ударной волны или в контактных неоднородностях задачи (на границах рассматриваемой области). В этом случае  $h$ - и  $p$ -сгущение не приводит к улучшению получаемого результата, а лишь значительно повышает объём вычислений.

Другими словами, нефизические артефакты решения нивелируются только увеличением количества элементов сетки на порядки, а изменение порядка аппроксимации производных вообще не оказывает влияния на сходимость. С другой стороны, понижение порядка точности аппроксимации пространственных производных до первого как и использование т.н. противопоточных разностей устраняет осцилляции, но ведёт к снижению пространственного разрешения из-за внесения существенной численной диффузии операторами численного дифференцирования первого порядка [244]. Во всех подобных случаях, в современной вычислительной математике принято использовать методы переменного порядка. Далее будут изложены принципы вычислительного мето-

да переменного порядка WENO, который широко применяется в расчётах, результаты которых приведены в диссертации.

### 2.2.3 Метод WENO

Группа методов WENO относится к классу нелинейных методов конечных объёмов и конечных разностей, которые могут численно аппроксимировать решения гиперболических законов сохранения или других, преимущественно конвективных задач, с высокой точностью в гладких областях и существенно без нефизических осцилляций в местах разрывов решений. Аббревиатура WENO расшифровывается как “взвешенный существенно безосцилляторный” (Weighted Essentially Non-Oscillatory).

Схемы WENO приобрели особую популярность для численных решений гиперболических уравнений с частными производными и многих других проблем, так или иначе связанных с конвекцией в отсутствие диффузии, либо в условиях, где вклад диффузии незначителен. Основным преимуществом таких схем является их способность добиваться произвольной точности формального порядка в гладких областях при сохранении стабильных резких переходов в областях разрывов решения. Численные схемы WENO особенно хорошо подходят для задач, содержащих как сильные разрывы, так и сложные функции гладкого решения. Фактически, в основе схем WENO лежит процедура аппроксимации, не связанная напрямую с конкретным дифференциальным уравнением, поэтому процедура WENO может с равным успехом использоваться и во многих приложениях, включая компьютерное зрение и обработку изображений.

Впервые, схема WENO была введена в 1994 году Лю, Ошером и Чан в их новаторской статье [236], где излагается схема конечных объёмов WENO третьего порядка точности. В 1996 году Цзян и Шу представили общую методологию построения схем конечных разностей WENO произвольного порядка точности [250], которые наиболее эффективны в многомерных расчетах. В большинстве современных приложений метода WENO используется схема пятого порядка точности, разработанная Цзянгом и Шу в 1996 [250, 251].

Как упоминалось ранее, в основе схем WENO фактически лежит процедура аппроксимации, не связанная напрямую с конкретным уравнением в частных производных. Для демонстрации этой процедуры приближения обратимся к следующей простой задаче интерполяции. Предположим, что нам задана однородная сетка  $\dots < x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  в узлах которой определены точечные значения функции  $f_i = f(x_i)$ . Мы хотели бы найти приближение функции  $f(x)$  в точке, отличной от узлов  $x_i$ , скажем, в серединной точке  $x_{i+1/2}$  между двумя узлами. Здесь можно воспользоваться тем, что существует и притом только один многочлен степени не выше двух, обозначаемый  $p_1(x)$ , который интерполи-

рует функцию  $f(x)$  по точкам сетки  $S_1 = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i\}$ , и тогда можно использовать  $f_{i+1/2}^{(1)} \equiv p_1(x_{i+1/2})$  в качестве приближения к значению  $f(x_{i+1/2})$  по формуле

$$f_{i+1/2}^{(1)} = \frac{3}{8}f_{i-2} - \frac{5}{4}f_{i-1} + \frac{15}{8}f_i, \quad (2.36)$$

которая точна вплоть до третьего порядка малости по шагу сетки  $f(x_{i+1/2}) = f_{i+1/2}^{(1)} + O(\Delta x^3)$ , если функция  $f(x)$  - гладкая в  $S_1$ . Такой выбор координат часто называют “шаблоном” или “трафаретом” (перевод англоязычного термина stencil).

Если мы выберем другой шаблон  $S_2 = \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$ , то получим другой интерполяционный многочлен  $p_2(x)$ , удовлетворяющий условию  $p_2(x_j) = f_j$  для  $j = i-1, i, i+1$  и получим другую аппроксимацию  $f_{i+1/2}^{(2)} \equiv p_2(x_{i+1/2})$  для  $f(x_{i+1/2})$ , явно заданную как

$$f_{i+1/2}^{(2)} = -\frac{1}{8}f_{i-1} + \frac{3}{4}f_i + \frac{3}{8}f_{i+1}, \quad (2.37)$$

которая также имеет третий порядок точности.

Наконец, можно выбрать ещё один шаблон для аппроксимации  $f(x_{i+1/2})$ , а именно ввести  $S_3 = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ , после чего будет построен интерполяционный полином  $p_3(x_j) = f_j$  для  $j = i, i+1, i+2$  и мы получим третью аппроксимацию  $f_{i+1/2}^{(3)} \equiv p_3(x_{i+1/2})$ , определяемую формулой третьего порядка точности

$$f_{i+1/2}^{(3)} = \frac{3}{8}f_i + \frac{3}{4}f_{i+1} - \frac{1}{8}f_{i+2}. \quad (2.38)$$

Выбор одной из трёх формул аппроксимации обусловлен соображениями минимизации локальных ошибок или стабильности численной схемы. С целью повышения точности расчётов данная схема может быть обобщена на шаблоны с бóльшим количеством точек, например,  $S = \{x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$ . Данный шаблон объединяет все три шаблона третьего порядка, приведённых выше, и, тогда для аппроксимации  $f_{i+1/2} \equiv p(x_{i+1/2})$  применяется уже формула пятого порядка точности

$$f_{i+1/2} = \frac{3}{128}f_{i-2} - \frac{5}{32}f_{i-1} + \frac{45}{64}f_i + \frac{15}{32}f_{i+1} - \frac{5}{128}f_{i+2}. \quad (2.39)$$

Важное замечание, лежащее в основе процедуры WENO, состоит в том, что приближение пятого порядка  $f_{i+1/2}$ , определенное в (2.39) и основанное на большом шаблоне  $S$ , можно записать в виде линейной выпуклой комбинации трёх аппроксимаций третьего порядка (2.36), (2.37) и (2.38), опираясь на определение всех трёх шаблонов  $S_1, S_2$  и  $S_3$ :

$$f_{i+1/2} = \gamma_1 f_{i+1/2}^{(1)} + \gamma_2 f_{i+1/2}^{(2)} + \gamma_3 f_{i+1/2}^{(3)}, \quad (2.40)$$

где постоянные  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$ , удовлетворяющие условию  $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$ , в литературе чаще всего называются *линейными весами* [251]. В случае аппроксимации (2.40) они равны

$$\gamma_1 = \frac{1}{16}, \gamma_2 = \frac{5}{8}, \gamma_3 = \frac{5}{16}.$$

Если аппроксимируемая функция  $f(x)$  является гладкой в шаблоне  $S$ , то все три аппроксимации третьего порядка точности могут быть использованы (2.36), (2.37) и (2.38), ровно как и аппроксимации пятого порядка точности (2.39) и (2.40). Однако, если функция  $f(x)$  имеет точки разрыва внутри диапазона  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ , тогда не все аппроксимации одинаково хороши.

Схема ENO, которая была предложена ранее Хартемом и его коллегами [252], была построена так, чтобы выбрать *одну из трёх* аппроксимаций (2.36), (2.37) или (2.38), основываясь информации о гладкости  $f_j$  в  $i - 2 \leq j \leq i + 2$ , оцениваемой разделёнными разностями. Такой подход гарантирует точность третьего порядка и отсутствие осцилляций в случае, если  $f(x)$  является гладкой по крайней мере в одном из трех шаблонов  $S_1, S_2$  и  $S_3$ . Идея метода WENO заключается в том, чтобы выбрать окончательную аппроксимацию в виде выпуклой комбинации всех аппроксимаций третьего порядка (2.36), (2.37), (2.38).

$$f_{i+1/2} = w_1 f_{i+1/2}^{(1)} + w_2 f_{i+1/2}^{(2)} + w_3 f_{i+1/2}^{(3)}, \quad (2.41)$$

где  $w_j \geq 0, w_1 + w_2 + w_3 = 1$ . Параметры  $w_j$  в литературе носят название *нелинейных весов*, для которых выполняются следующие условия: если функция  $f(x)$  гладкая в шаблоне  $S$ , то нелинейные веса принимают значения, равные линейным, т.е.  $w_j \approx \gamma_j$ , иначе нелинейный вес равен нулю  $w_j \approx 0$ , если в шаблоне  $S_j$  аппроксимируемая функция терпит разрыв, но гладкая в остальных шаблонах.

Выбор нелинейных весов  $w_j$  определяется показателем гладкости  $\beta_j$ , который даёт оценку относительной гладкости функции  $f(x)$  в шаблоне  $S_j$ . Чем больше этот показатель  $\beta_j$ , тем менее гладкая функция  $f(x)$  заключена в шаблоне  $S_j$ . Чаще всего в литературе этот показатель гладкости выбирается как и в оригинальной работе [250]

$$\beta_j = \sum_{l=1}^k \Delta x^{2l-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \left( \frac{d^l}{dx^l} p_j(x) \right)^2 dx, \quad (2.42)$$

где  $k$  - степень интерполяционного полинома  $p_j(x)$ , который в данном случае  $k = 2$ . Показатель (2.42), очевидно, представляет собой сумму квадратов норм в гильбертовом пространстве ( $L^2$ ) всех производных соответствующего интерполяционного полинома

$p_j(x)$  в точке интервала  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . В нашем случае для аппроксимации третьего порядка показатели гладкости имеют вид:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{1}{3} (4f_{i-2}^2 - 19f_{i-2}f_{i-1} + 25f_{i-1}^2 + 11f_{i-2}f_i - 31f_{i-1}f_i + 10f_i^2), \\ \beta_2 &= \frac{1}{3} (4f_{i-1}^2 - 13f_{i-1}f_i + 13f_i^2 + 5f_{i-1}f_{i+1} - 13f_if_{i+1} + 4f_{i+1}^2), \\ \beta_3 &= \frac{1}{3} (10f_i^2 - 31f_if_{i+1} + 25f_{i+1}^2 + 11f_if_{i+2} - 19f_{i+1}f_{i+2} + 4f_{i+2}^2),\end{aligned}\quad (2.43)$$

благодаря чему теперь можно определить нелинейные веса

$$w_j = \frac{\tilde{w}_j}{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + \tilde{w}_3}, \quad \text{где } \tilde{w}_j = \frac{\gamma_j}{(\varepsilon + \beta_j)^2}, \quad (2.44)$$

где  $\varepsilon = 10^{-6}$  - малая положительная постоянная, которая не даёт знаменателю принимать значения, близкие к нулю, что, в свою очередь, позволяет избежать переполнения при машинном счёте.

Метод WENO может быть применён для различных видов численных схем и обобщён на более высокие порядки интерполяционных полиномов в целях повышения суммарной точности расчёта. Однако в данной диссертационной работе применение метода WENO ограничивается только схемами третьего и пятого порядков точности для одномерных уравнений непрерывности электронов и ионов в декартовых координатах, которые записаны в следующей форме

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_e}{\partial x} &= D_e \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + S_i, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x} &= D_i \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + S_i,\end{aligned}\quad (2.45)$$

где  $n_e$  и  $n_i$  - концентрации электронов и ионов, соответственно,  $\Gamma_e = -\mu_e n_e E$  и  $\Gamma_i = \mu_i n_i E$  - их дрейфовые (конвективные) потоки,  $D_e$  и  $D_i$  - соответствующие постоянные коэффициенты диффузии,  $S_i$  - источник рождения заряженных частиц в задаче.

Дискретизация уравнений (2.45) осуществляется следующим образом: диффузионные члены в правых частях уравнений записываются в терминах конечных разностей, а именно через оператор второй производной (2.35), значение источника  $S_i$  вычисляется непосредственно в узлах используемого сеточного разбиения, а конвективная часть уравнений (2.45) дискретизируется методом конечных объёмов с использованием схемы WENO.

Остановимся более конкретно на применении этой комбинации методов, для чего возьмём только конвективную часть одного из вышепредставленных уравнений в

следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0. \quad (2.46)$$

Для решения уравнения (2.46) мы будем использовать дискретизацию одномерного градиента конвективного потока методом WENO, в результате чего мы получим систему уравнений метода линий, которая легко обобщается для (2.45) путём добавления недостающих слагаемых в правых частях уравнений.

Будем считать, что знак направления конвективного потока строго не фиксирован условиями задачи. Тогда можно воспользоваться процедурой Лакса-Фридрихса [231] для расщепления знакопеременного потока  $\Gamma$  на положительную  $\Gamma^+$  и отрицательную  $\Gamma^-$  составляющие части

$$\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-, \quad (2.47)$$

где потоки Лакса-Фридрихса  $\Gamma^\pm = \frac{1}{2}(\Gamma \pm \max |\Gamma'(f)|f)$  являются знакоопределёнными, т.е.  $\frac{d\Gamma^+}{df} \geq 0$ ,  $\frac{d\Gamma^-}{df} \leq 0$ .

Поскольку обобщение метода дискретизации на случай квазиоднородной сетки не представляет никакой сложности, мы будем считать, что в данном примере пространственное разбиение однородно. Для вычисления градиента потока нам потребуется определить значения каждого из потоков Лакса-Фридрихса посередине между узлами  $i$  и  $i + 1$  однородного сеточного разбиения, т.е. вычислить  $\Gamma_{i+1/2}^\pm$ . Тогда, дискретизация уравнения (2.46) методом конечных элементов будет представлять следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений метода линий

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{\Gamma_{i+1/2}^+ + \Gamma_{i+1/2}^- - \Gamma_{i-1/2}^+ - \Gamma_{i-1/2}^-}{\Delta x} = 0. \quad (2.48)$$

Рассмотрим вначале схему третьего порядка точности. В ней, по аналогии с (2.41), поток будет представлять комбинацию двух слагаемых аппроксимации, которые для неотрицательного потока  $\Gamma_{i+1/2}^+$  будут иметь вид

$$\Gamma_{i+1/2}^+ = w_1 \Gamma_{i+1/2}^{+(1)} + w_2 \Gamma_{i+1/2}^{+(2)}, \quad (2.49)$$

где  $\Gamma_{i+1/2}^{+(1)}$  и  $\Gamma_{i+1/2}^{+(2)}$  - аппроксимации потоков формулами второго порядка точности в шаблонах  $[x_{i-1}, x_i]$  и  $[x_i, x_{i+1}]$ , соответственно, которые даются следующими выражениями

$$\Gamma_{i+1/2}^{+(1)} = -\frac{1}{2}\Gamma_{i-1}^+ + \frac{3}{2}\Gamma_i^+, \quad \Gamma_{i+1/2}^{+(2)} = \frac{1}{2}\Gamma_i^+ + \frac{1}{2}\Gamma_{i+1}^+. \quad (2.50)$$

Нелинейные веса  $w_1$  и  $w_2$  выражаются формулами, аналогичными (2.44)

$$w_m = \frac{\tilde{w}_m}{\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2}, \quad \tilde{w}_m = \frac{\gamma_m}{(\varepsilon + \beta_m)^2}, \quad m = 1, 2, \quad (2.51)$$

где соответствующие линейные веса

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{3} \quad (2.52)$$

и показатели гладкости (2.42) для случая третьего порядка точности имеют вид

$$\beta_1 = (\Gamma_i^+ - \Gamma_{i-1}^+)^2, \quad \beta_2 = (\Gamma_{i+1}^+ - \Gamma_i^+)^2 \quad (2.53)$$

Для потока противоположного направления  $\Gamma_{i+1/2}^-$  формулы (2.49) примут вид

$$\Gamma_{i+1/2}^- = w_1 \Gamma_{i+1/2}^{-(1)} + w_2 \Gamma_{i+1/2}^{-(2)},$$

где аппроксимации потоков противоположного направлениями формулами третьего порядка точности имеют вид

$$\Gamma_{i+1/2}^{-(1)} = -\frac{1}{2} \Gamma_{i+2}^- + \frac{3}{2} \Gamma_{i+1}^-, \quad \Gamma_{i+1/2}^{-(2)} = \frac{1}{2} \Gamma_i^- + \frac{1}{2} \Gamma_{i+1}^-.$$

Линейные (2.52) и нелинейные веса (2.51) для обратного потока  $\Gamma_{i+1/2}^-$  остаются без изменений, а их показатели гладкости приобретают вид

$$\beta_1 = (\Gamma_{i+2}^- - \Gamma_{i+1}^-)^2, \quad \beta_2 = (\Gamma_{i+1}^- - \Gamma_i^-)^2.$$

Аналогичным образом получаются формулы WENO пятого порядка точности [253] для потоков обоих направлений, подготовленных процедурой расщепления Лакса-Фридрикса

$$\Gamma_{i+1/2}^\pm = w_1 \Gamma_{i+1/2}^{\pm(1)} + w_2 \Gamma_{i+1/2}^{\pm(2)} + w_3 \Gamma_{i+1/2}^{\pm(3)}, \quad (2.54)$$

где аппроксимации потоков четвёртого порядка точности в трёх-точечных шаблонах  $([x_{i-2}, x_{i-1}, x_i], [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}])$  и  $([x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}], [x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}])$  соответственно



$$\begin{aligned}
\Gamma_{i+1/2}^{+(1)} &= \frac{2}{6}\Gamma_{i-2}^+ - \frac{7}{6}\Gamma_{i-1}^+ + \frac{11}{6}\Gamma_i^+, & \Gamma_{i+1/2}^{-(1)} &= -\frac{1}{6}\Gamma_{i-1}^+ + \frac{5}{6}\Gamma_i^+ + \frac{2}{6}\Gamma_{i+1}^+, \\
\Gamma_{i+1/2}^{+(2)} &= -\frac{1}{6}\Gamma_{i-1}^+ + \frac{5}{6}\Gamma_i^+ + \frac{2}{6}\Gamma_{i+1}^+, & \Gamma_{i+1/2}^{-(2)} &= \frac{2}{6}\Gamma_i^+ + \frac{5}{6}\Gamma_{i+1}^+ - \frac{1}{6}\Gamma_{i+2}^+, \\
\Gamma_{i+1/2}^{+(3)} &= \frac{2}{6}\Gamma_i^+ + \frac{5}{6}\Gamma_{i+1}^+ - \frac{1}{6}\Gamma_{i+2}^+, & \Gamma_{i+1/2}^{-(3)} &= \frac{11}{6}\Gamma_{i+1}^+ - \frac{7}{6}\Gamma_{i+2}^+ + \frac{2}{6}\Gamma_{i+3}^+.
\end{aligned}$$

Выражения для нелинейных весов даются выше (2.44), а линейные веса для данной аппроксимации равны

$$\gamma_1 = \frac{1}{10}, \quad \gamma_2 = \frac{6}{10}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{10}. \quad (2.55)$$

Приведём ниже явные выражения для показателей гладкости (2.42), относящихся к потокам обоих направлений:

$$\begin{aligned}
\beta_1^+ &= \frac{13}{12} (\Gamma_{i-2}^+ - 2\Gamma_{i-1}^+ + \Gamma_i^+)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_{i-2}^+ - 4\Gamma_{i-1}^+ + 3\Gamma_i^+)^2 \\
\beta_2^+ &= \frac{13}{12} (\Gamma_{i-1}^+ - 2\Gamma_i^+ + \Gamma_{i+1}^+)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_{i-1}^+ - \Gamma_{i+1}^+)^2 \\
\beta_3^+ &= \frac{13}{12} (\Gamma_i^+ - 2\Gamma_{i+1}^+ + \Gamma_{i+2}^+)^2 + \frac{1}{4} (3\Gamma_i^+ - 4\Gamma_{i+1}^+ + \Gamma_{i+2}^+)^2 \\
\beta_1^- &= \frac{13}{12} (\Gamma_{i+1}^- - 2\Gamma_{i+2}^- + \Gamma_{i+3}^-)^2 + \frac{1}{4} (3\Gamma_{i+1}^- - 4\Gamma_{i+2}^- + \Gamma_{i+3}^-)^2 \\
\beta_2^- &= \frac{13}{12} (\Gamma_i^- - 2\Gamma_{i+1}^- + \Gamma_{i+2}^-)^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_i^- - \Gamma_{i+2}^-)^2 \\
\beta_3^- &= \frac{13}{12} (\Gamma_{i-1}^- - 2\Gamma_i^- + \Gamma_{i+1}^-)^2 + \frac{1}{4} (3\Gamma_{i-1}^- - 4\Gamma_i^- + \Gamma_{i+1}^-)^2.
\end{aligned}$$

Описанные в данном разделе схемы третьего и пятого порядков точности являются наиболее употребимыми среди существующих методов WENO в современной вычислительной физике, охватывающей широкий круг прикладных и фундаментальных нелинейных задач тепло- и массопереноса, физики металлов и полупроводников, а также геофизики и астрофизики. Многие прикладные расчёты с использованием WENO реализованы в современных программных комплексах. В следующей главе методы WENO впервые применяются к дифференциальным уравнениям, описывающим поведение плазмы газового разряда высокого давления в геометрии с резко-неоднородными граничными условиями. Как было отмечено выше, дискретизация уравнений непрерывности методом WENO затрагивает только дрейфовую часть полного потока частиц, оставляя диффузионный член записанным в терминах центральных конечных разностей. Тем не менее, схемы WENO допустимо использовать для потоков любых видов в обобщённой форме, в том числе и для включающих многокомпонентную, амбиполярную и температурную диффузию частиц.

Вышеизложенные математические методы численного решения уравнений переноса были успешно апробированы для большого количества тестовых вычислительных задач, например, приведённых в работе [254]. Однако наиболее ценными для верификации численных алгоритмов являются нетривиальные научные и инженерные задачи, решение которых представляет значительную новизну. Одной из таких проблем является задача о численном детерминистическом моделировании процессов возникновения, движения и гашения доменов сильного поля в полупроводниковых структурах диодов Ганна трёхсантиметрового диапазона микроволнового излучения. Данная теоретическая задача была успешно решена автором настоящей диссертации, в результате чего его работа является основным личным научным вкладом в кандидатское диссертационное исследование к.ф.-м.н. В.Ю. Конева (ИСЭ СО РАН) [255]. Ключевые теоретические результаты этих исследований опубликованы в серии статей и полнотекстовых докладов на международных конференциях [66, 67, 90, 99, 120].

#### **2.2.4 Математическая модель формирования доменов сильного поля в диодах Ганна**

Постановка задачи о теоретическом моделировании нелинейных процессов в полупроводниковых структурах напрямую связана с фундаментальной проблемой стабилизации фазы СВЧ-генераторов, которая не теряет своей актуальности на протяжении многих десятилетий. Управление амплитудой и фазой колебаний СВЧ-приборов широко используется, начиная от систем телевизионного вещания и заканчивая задачами электронного управления положением радиолуча в пространстве в радиолокационных системах. Совершенствование фазовых характеристик источника СВЧ-колебаний позволяет значительно улучшать соотношение сигнал/шум системы приёма-передачи сигнала.

Существует несколько способов фазовой стабилизации источников СВЧ-колебаний, которые одинаково применимы к СВЧ-генераторам любой физической природы, такие как использование дополнительного резонатора, синхронизация внешним сигналом, автоматическая подстройка частоты и фазы [256]. Все подобные приёмы усложняют конструкцию генератора, не позволяя фиксировать начальную фазу СВЧ-колебаний от импульса к импульсу. В равной мере данные трудности относятся и к полупроводниковым генераторам СВЧ-колебаний на основе эффекта Ганна [257] (диодам Ганна).

Диоды Ганна традиционно представляют собой кристалл арсенида галлия с обеих сторон которого присоединены омические контакты. Активная часть диодов Ганна как правило имеет протяжённость порядка 1 – 100 мкм с концентраций легирующих

донорных примесей на уровне  $10^{14} - 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . В энергетической структуре зоны проводимости арсенида галлия имеются два минимума энергии. Им соответствуют два состояния электронов, поэтому, при увеличении напряжённости электрического поля, увеличивается средняя дрейфовая скорость электронов вплоть до момента достижения полем некоторого предельного (критического) значения, после чего дрейфовая скорость уменьшается, стремясь к некоторому значению скорости насыщения.

Если к диоду Ганна прикладывается напряжение, которое превышает произведение критического значения напряжённости поля на толщину активного слоя арсенида галлия в диоде, то распределение напряжённости электрического поля перестаёт быть однородным, приобретая неустойчивый характер. В этом случае при возникновении в узкой области небольшого максимума напряжённости электроны, находящиеся ближе к аноду, переместятся из этой области к аноду. При этом электроны, располагающиеся вблизи катода, будут стремиться опередить направленный к аноду двойной заряженный слой. Таким образом, при его движении, напряжённость электрического поля будет увеличиваться внутри слоя и спадать до равновесного значения за его пределами. Двойной слой электрических зарядов, характеризующийся высокой напряжённостью электрического поля, получил название “домена сильного поля”, а соответствующая величина приложенного к диоду напряжения называется “пороговой”.

Принципиально важной характеристикой СВЧ-автогенератора является значение уровня фазового шума. Исследование возможностей реализации максимально высоких требований к уровню фазового шума в настоящее время не теряет своей сложности и актуальности при проектировании СВЧ-автогенераторов. Добиться относительно высоких фазо-шумовых характеристик прибора возможно благодаря использованию активных СВЧ-устройств, имеющих низкий уровень фликкер-шумов в системах высокочастотных резонаторов вместе с дополнительными схемотехническими решениями [258]. Конкретно у диодов Ганна существуют некоторые фундаментальные особенности, являющиеся причинами возникновения шумовой составляющей спектра выходных колебаний [259]. Данные особенности имеют нелинейную природу и являются причиной фазовой неустойчивости прибора. Автор [255] указывает на то, что существует достаточно большое количество факторов, дающих вклад в шумы приборов, основанных на физике междолинного перехода электронов: флуктуации скорости домена, флуктуации времён зарождения доменов, контактные явления, поверхностные процессы и ловушки. Однако адекватной теории шумов в генераторах Ганна до сих пор не существует. Попытки синхронизации нескольких генераторов Ганна традиционными способами сопряжены со значительными трудностями, такими как необходимость подбора оптимального соотно-

шения мощностей синхронизирующего и синхронизируемого генераторов, требования обеспечения электродинамической связи между генераторами и пр.

Однако в 1975 году Ю.В. Введенским с соавторами [260] была впервые продемонстрирована принципиально новая возможность стабилизации фазы диода Ганна. Она осуществлялась подачей резкого фронта импульса напряжения на диод. Авторам [260] удалось экспериментально зафиксировать последовательность когерентных радиоимпульсов, которые генерировались маломощным диодом Ганна в коаксиальном резонаторе, при подаче на него питающего напряжения с передним фронтом, равным 150 пс. Несущая частота СВЧ-колебаний при этом составляла 9.5 ГГц, т.е. длительность переднего фронта примерно равнялась периоду колебаний. Данный способ является наиболее перспективным с точки зрения простоты конструкции генератора, способного создавать последовательности когерентных радиоимпульсов. Наиболее значительное развитие метод синхронизации электродинамически несвязанных осцилляторов Ганна получил в диссертационной работе к.ф.-м.н. В.Ю. Конева [255], теоретическая часть которой основана на численном решении уравнений модели активной области диода Ганна, которая излагается ниже в краткой форме.

В работе В.Ю. Конева [255], автором, совместно с к.ф.-м.н. А.И. Климовым, было предложено для моделирования мощных диодов Ганна типа 3A762 [261] использовать простую детерминистическую модель полупроводниковой структуры [262], называемую в литературе “локально-полевой”. Она основывается на приближённом описании процесса междолинного переноса электронов в соединениях химических элементов периодической таблицы Менделеева третьей и пятой групп соответственно. Применение локально-полевых моделей хорошо обосновано для мощных диодов Ганна [263]. Данные условия применимости можно сформулировать для структур из арсенида галлия (GaAs) в виде двух положений: длина активной области полупроводниковой структуры не должна быть меньше  $\sim 0.5$  мкм, и характерные времена воздействия на неё не короче 1.25 пс. Для моделируемой задачи данные условия соблюдались с достаточным “запасом” по величинам характерных параметров.

В рамках локально-полевой модели скорость электронов определяется мгновенным локальным значением напряжённости электрического поля. Полупроводниковая структура диода Ганна представляется в модели в виде одномерного кристалла арсенида галлия с двумя областями высокой проводимости (омическими контактами) на противоположных сторонах, соответствующих границам области (рисунок 2.10).

В локально-полевой теории ток проводимости внутри полупроводника линейно зависит от скорости электронов:

$$I = qnvS, \quad (2.56)$$

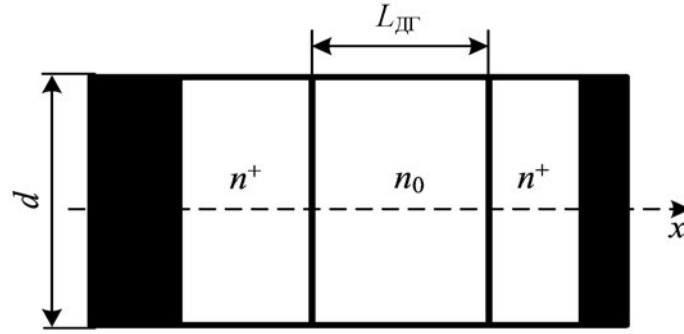


Рисунок 2.10 — Структура активной области одномерной полупроводниковой структуры диода Ганна.

где  $n$  - концентрация электронов в активной области,  $q$  - заряд электрона,  $S$  - площадь поперечного сечения кристалла арсенида галлия. Напряжение  $U = \int_0^L E(x, t) dx$  на диоде пропорционально электрическому полю  $E$ , которое подчиняется одномерному уравнению Пуассона:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{q(n - n_0)}{\varepsilon_a}, \quad (2.57)$$

где  $\varepsilon_a$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость арсенида галлия,  $n_0$  - концентрация доноров в полупроводнике, которая также называется *профилем легирования* активной области диода Ганна.

Полная плотность тока в диоде не зависит от координаты и может быть численно приравнена к полной плотности тока тока, протекающего через омические контакты, отнесённой к площади поперечного сечения  $I/S$ , т.е.

$$\frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (2.58)$$

где полная плотность тока  $j$  складывается из плотности тока проводимости, тока диффузии и тока смещения, которые соответственно представляют собой три слагаемых в выражении ниже:

$$j \equiv qnv(E) - qD \frac{\partial n}{\partial x} + \varepsilon_a \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{S}, \quad (2.59)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии электронов,  $I$  - полный ток через диод, определяемый внешней электрической цепью.

Если выразить из уравнения Пуассона (2.57) электронную концентрацию  $n$  и подставить её в (2.59), то получается дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее эволюцию электрического поля в промежутке

$$\frac{\partial E}{\partial t} = D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - v(E) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{q}{\varepsilon_a} D \frac{dn_0(x)}{dx} - \frac{q}{\varepsilon_a} n_0(x) v(E) + \frac{I}{\varepsilon_a S}. \quad (2.60)$$

Значение тока в правой части дифференциального уравнения (2.60) определяется электрической цепью подключения диода Ганна. С позиции представлений основ теории электрических цепей данный диод является источником напряжения управляемым значением тока [264], которое определяется правилами Кирхгофа для конкретной цепи. Таким образом, электрическая цепь подключения оказывает значительное влияние на нелинейные процессы, в частности на профиль напряжённости и характерные времена возникновения доменов сильного поля.

Уравнение (2.60) представляет собой нелинейное уравнение переноса для мгновенного значения электрического поля, представляющее аналог уравнения (1.16). Оно описывает вклад трёх согласованных физических процессов: конвекции, диффузии и генерации (электрического поля). В локально-полевой формулировке теории [262] скорость дрейфа электронов зависит только от локального значения электрического поля, т.е.  $v(E) = \mu_a(E)E$ , где  $\mu_a(E)$  - это функция подвижности электронов в кристалле GaAs.

Численное решение уравнения (2.60) требует задания корректных начальных и граничных условий. Для того чтобы их сформулировать, будем считать, что в начальный момент времени  $t = 0$  напряжение на диоде Ганна  $U = 0$  и, следовательно,  $E(x) = 0$  в случае, если производная профиля легирования равна нулю  $dn_0/dx = 0$ . Иначе, при  $dn_0/dx \neq 0$ , возникает ток диффузии и образуются внутренние области зарядов, что приводит к возникновению слабого тока проводимости. При отсутствии напряжения, сумма диффузионного тока и тока проводимости близка к нулю. Тогда из (2.59) следует выражение для пространственного распределения начального условия для напряжённости поля:

$$E(x, t)|_{t=0} = \frac{D}{\mu_a} \frac{d \log n_0(x)}{dx}, \quad (2.61)$$

графическое представление которого дано на рисунке 2.11.

Несмотря на то, что распределение т.н. профиля легирования  $n_0(x)$  считается известным, для задания граничных условий необходимо знать полное распределение примесей по всей длине диода Ганна, в том числе структуру и свойства слоёв, выполняющих роль омических контактов. Профили легирования реальных фабричных диодов Ганна значительно разнятся между собой, так что в технической документации и паспорте изделия [261] эта характеристика не приводится. В используемом модельном описании процессов генерации СВЧ-колебаний в диодах Ганна можно пренебречь контактными неоднородностями на границах рассматриваемой активной структуры, накладывая в областях, примыкающих к предполагаемым омическим контактам открытые граничные

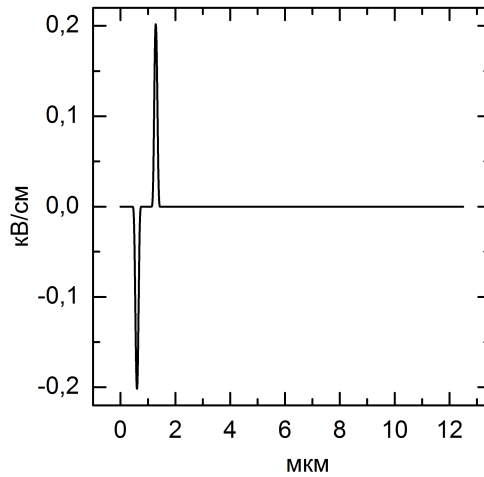


Рисунок 2.11 — Профиль согласованного начального распределения электрического поля в диоде Ганна (2.61).

условия в виде “нулевых” условий Неймана:

$$\frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (2.62)$$

где  $L$  - длина рассматриваемой области арсенида галлия в диоде. Сам профиль легирования в большинстве расчётов представлял собой элементарную структуру распределения, изображённую на рисунке 2.12

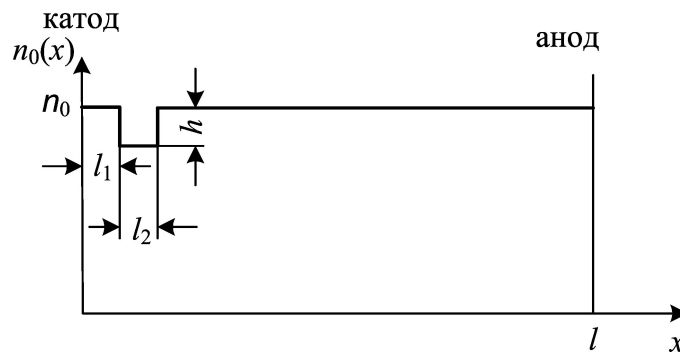


Рисунок 2.12 — Упрощённый профиль легирования диода Ганна без областей омических контактов.

В структуре с данным на рисунке 2.12 профилем легирования, начальная флуктуация электрического поля и, соответственно, возникновение домена сильного поля инициировались вводом неоднородности  $h$  величиной 10 % от постоянного уровня концентрации доноров  $n_0(x)$ . Эта неоднородность представляла собой прямоугольную область шириной  $l_2 = 10$  мкм на расстоянии  $l_1 = 10$  мкм от левого края структуры. Общие характеристики полупроводника во всех расчётах оставались неизменными: ба-

зовая (фоновая) концентрация примесей доноров  $n_0 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , пониженный уровень концентрации доноров в неоднородности  $n_1 = 0.9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .

Зависимость электронной скорости дрейфа от модуля электрического поля  $v(E)$  задавалась бралась из [265] в виде:

$$v(E) = \frac{\mu_a E + V_{\text{нас}} \left( \frac{E}{E_{\text{нас}}} \right)^4}{1 + \left( \frac{E}{E_{\text{нас}}} \right)^4}, \quad (2.63)$$

где скорость дрейфа  $V_{\text{нас}} = 10^7 \text{ см/с}$ , соответствующая насыщению значения при максимальном значении поля  $E_{\text{нас}} = 4000 \text{ В/см}$  [262].

Во всех изучаемых случаях поперечное сечение полупроводниковой структуры предполагалось считать цилиндрическим с диаметром 300 мкм и длиной 12.5 мкм. Постоянная подвижности в (2.63) была равна  $\mu_a = 8000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ , а коэффициент электронной диффузии полагался равным константе  $D = 200 \text{ см}^2/\text{с}$ . В дополнительно проведённых расчётах было показано, что учёт точной зависимости  $D(E)$  качественно и количественно не меняет результаты моделирования [262]. Для всех расчетов форма напряжения импульсного источника питания диода (модулирующего напряжения) задавалась трапецеидальной:

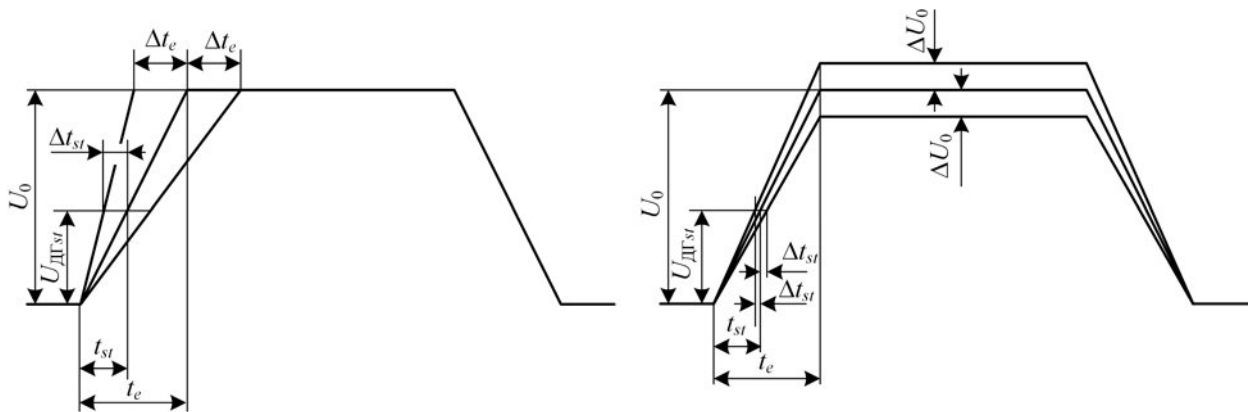


Рисунок 2.13 — Трапецевидная форма импульса напряжения источника питания:  $U_{\text{ДГ}st}$  – напряжение, при котором СВЧ-колебания начинаются;  $U_0, \Delta U_0$  – амплитуда и вариация амплитуды модулирующего импульса;  $t_{st}$  – момент времени, при котором происходит возникновение СВЧ-колебаний;  $\Delta t_{st}$  – вариация момента времени запуска СВЧ-колебаний;  $t_e, \Delta t_e$  – длительность и вариация длительности фронта.

На приведённом рисунке 2.13 видно, что для зафиксированной амплитуды импульса напряжения модулятора  $U_0$  и вариации длительности фронта  $t_e$  меняется точка запуска СВЧ-колебаний  $t_{st}$ , а это, в свою очередь, приводит к появлению разброса фазы колебаний. Аналогичным образом изменение  $t_{st}$ , приводящее к разбросу фазы, получается если фиксировать длительность фронта и варьировать амплитуду импульса напряжения.



## 2.2.5 Численное моделирование автогенераторов Ганна

В диссертации [255] приводятся результаты моделирования работы полупроводниковой структуры диода Ганна для двух основных вариантов подключения (см. рисунок 2.14): в цепи с резистивной нагрузкой и в цепи с внешним колебательным контуром (с резонатором). Автор данной работы не ставит перед собой цель в текущем разделе пересказать всё содержание теоретической части диссертации В.Ю. Конева, а лишь продемонстрировать конкретный пример практического применения комбинации метода линий и метода конечных разностей. Ниже приводится сжатое изложение теоретического моделирования возникновения и динамики доменов сильного поля в автогенераторе Ганна, находящегося в цепи модулятора с внутренним сопротивлением. Также здесь даётся обзор основных полученных результатов этого моделирования.

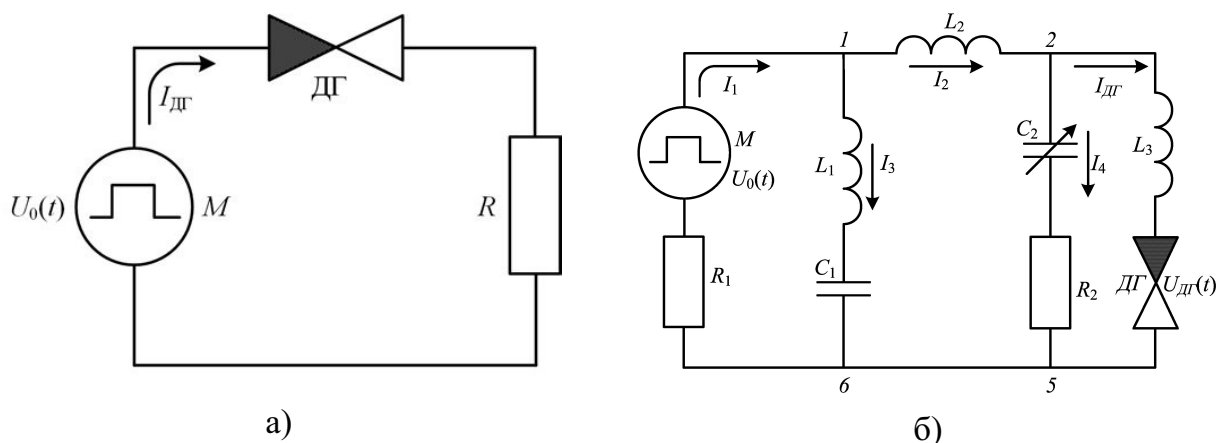


Рисунок 2.14 — Простейший вариант электрической цепи автогенератора с резистивной нагрузкой (а) и схема замещения генератора с диодом Ганна в резонаторе (б).

В рассматриваемом случае предполагалось, что диод Ганна подключался к источнику импульсного напряжения  $U_0(t)$  (модулятору) последовательно через ограничительное сопротивление  $R = 1$  Ом. Отсюда в уравнении для электрического поля (2.60) полный ток из уравнения внешней цепи будет иметь вид:

$$I = \frac{U_0(t) - \int_0^L E(x, t) dx}{R}. \quad (2.64)$$

Численное решение задачи, сформулированной в данном разделе, облегчается тем, что она может быть решена без потери точности расчёта с использованием только однородной пространственной сетки

$$x_i = i\Delta x \equiv \frac{L}{M}i, \quad \text{где } i = 1..M, \quad E(x_i, t) = E_i, \quad n_0(x_i) = n_{0i},$$

на которой дискретизация уравнения (2.60) даёт следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений метода линий

$$\begin{aligned} \frac{dE_i}{dt} = & D \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(2)} E_j - v(E_i) \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(1)} E_j + \\ & + \frac{q}{\varepsilon_a} D \sum_{j=1}^M D_{ij}^{(1)} n_{0j} - \frac{q}{\varepsilon_a} n_{0i} v(E_i) + \frac{U_0(t) - \frac{\Delta x}{2} \sum_{k=2}^M (E_{i-1} + E_i)}{\varepsilon_a R S}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

в которой для дискретизации слагаемого, содержащего интеграл (2.64) используется численная квадратурная формула Ньютона-Котеса замкнутого типа третьего порядка точности для равноотстоящих узлов [221], которая также называется в литературе *правилом трапеций*.

Граничные условия Неймана (2.62) для схемы (2.65) реализуется в виде аппроксимации первой производной, имеющей второй порядок точности, на обеих границах активной зоны:

$$E_1 = E_3, \quad E_M = E_{M+2}. \quad (2.66)$$

Расстояние между узлами пространственной сетки  $\Delta x$  выбирается по крайней мере в 100 раз меньше размера активной области полупроводникового диода  $L$ , что значительно меньше характерных размеров области домена сильного поля [262]. Используемого пространственного разбиения достаточно для проведения численных расчётов высокого разрешения при использовании метода конечных разностей с представлением пространственных производных аппроксимациями второго порядка точности без использования других, более сложных численных схем. Уточнения значений численного интеграла путём использования формул Ньютона-Котеса более высокого порядка также не требуется.

Дополнительная верификация предложенной численной схемы осуществлялась путём применения для решения (2.60) неявной интегро-интерполяционной схемы, аналогичной [266], которая была использована в работах [66, 90]. Во всех расчётах минимальным критерием сходимости используемых схем численного расчёта являлся контроль значения абсолютной ошибки  $\epsilon_{abs}$ . В расчётах, результаты которых обобщены в работе [255], значение  $\epsilon_{abs}$  не превышает 0.001 В/см. При заданной абсолютной точности, величина временного шага не превышала десятых долей пикосекунды. Программная реализация кода была выполнена в среде Mathworks MATLAB 2012a с использованием встроенных библиотечных функций решателей систем обыкновенных дифференциальных уравнений - ode15s и ode45. Также независимый вариант кода был выполнен на

языке C стандарта C11 без использования каких-либо дополнительных библиотечных функций. В последнем случае решателем выступала процедура Рунге-Кутты-Фельберга 4 – 5 порядков.

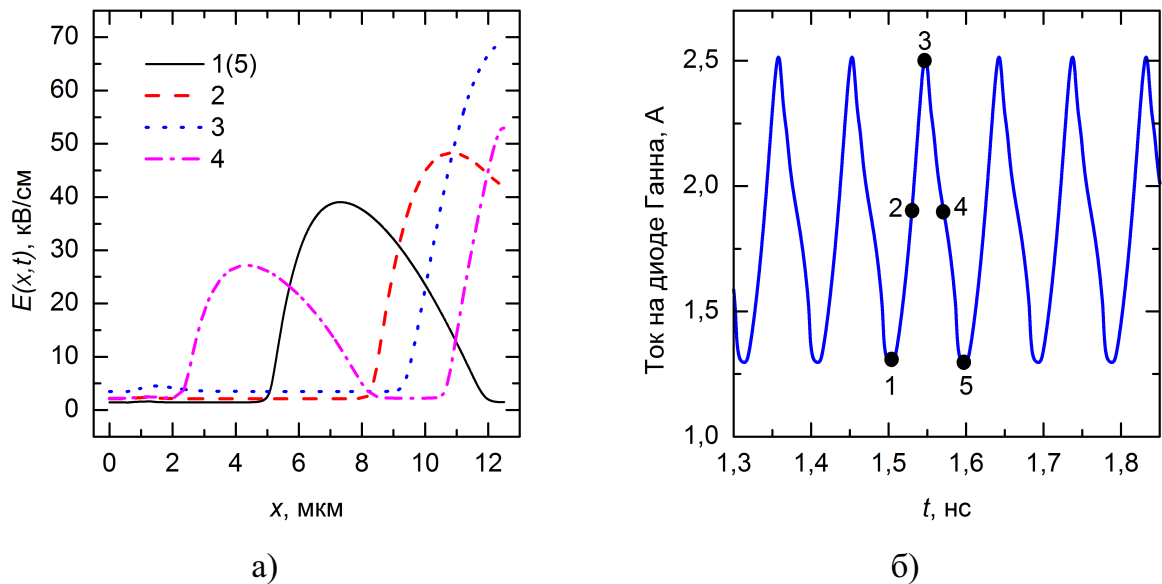


Рисунок 2.15 — Результаты моделирования физических процессов в диоде Ганна в пролётном режиме: а) распределение электрического поля по длине активной области в различные моменты времени, указанные на осциллограмме тока б).

На рисунке 2.15 показаны мгновенные распределения электрического поля для различных моментов времени. В данном случае диод работает в т.н. *пролётном режиме* [260], при котором мгновенное значение напряжения на диоде (рисунок 2.16) всегда больше порогового значения. Напряжённость электрического поля распределена в активной зоне неравномерно: существует область повышенной напряжённости  $E > E_{\text{пор}}$  и область, в которой значения напряжённости имеют допороговые значения. Область повышенной напряжённости является дипольным доменом или *доменом сильного поля*. Он представляет собой двойной заряженный слой, где отрицательный заряд образован избыточным накоплением электронов, а положительный заряд, соответственно, образован областью, обеднённой электронами, в которой преобладают доноры. Кривая 4 рисунка 2.15 показывает, что в отдельные моменты времени в полупроводниковой структуре могут существовать два выраженных домена сильного электрического поля. Один из них находится вблизи анода, а второй только начинает зарождаться у катода.

Периодическое зарождение, движение и гибель дипольных доменов является причиной возникновения колебаний тока и напряжения в диоде Ганна, проиллюстрированных на рисунке 2.16. Для короткого трапециевидного импульса питающего напряжения старт осцилляций начинается на переднем фронте импульса. Период колебаний примерно

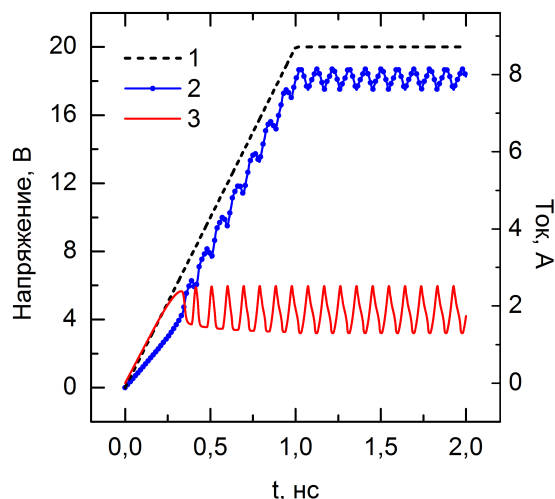


Рисунок 2.16 — Временные зависимости: напряжения на источнике - 1, падения напряжения на диоде Ганна - 2 и тока в цепи диода Ганна - 3.

равен времени пролёта двойного зарядового слоя от катода к аноду. Зарождение доменов является прямым следствием нелинейности конвективного слагаемого в уравнении (2.60), в котором коэффициент при первой производной -  $v(E)$  - имеет отрицательную крутизну. Физически, при движении домена, ток через диод почти полностью состоит из тока проводимости (2.56). В тех промежутках времени, которые соответствуют зарождению и гибели доменов сильного поля, большую долю полного тока диода составляет ток смещения.

Обращаясь к выводам первых экспериментальных исследований [260] следует отметить, что основной целью рассмотрения данной модели являлось исследование влияния нестабильности фронта импульса питающего напряжения  $\Delta t_e$  на величину разброса временного запаздывания фазы СВЧ-колебаний тока диода Ганна  $\Delta t_{ph}$  (относительно среднего значения). Передний фронт импульса питающего напряжения, показанный на рисунке 2.13, варьировался в пределах  $\Delta t_e = \pm 0.05$  нс по отношению к его среднему значению  $t_e = 1$  нс. Во всех исследуемых случаях максимальная амплитуда напряжения модулятора задавалась равной  $U_0 = 20$  В. При этом частота колебаний тока диода составляла 10.5 ГГц. При использовании простого профиля легирования Ганна (Рисунок 2.12) полученная в расчётах форма нелинейных колебаний тока диода оказалась аналогичной случаю рассмотрения диода с неоднородным сглаженным профилем, примерная структура которого была взята из [262]. На рисунке 2.17 представлен график временной зависимости полного тока диода Ганна с квазиоднородным профилем легирования. Цифрами 1, 2, 3 отмечены осциллограммы тока, полученные при запуске СВЧ-колебаний импульсами напряжения с фронтами, соответствующими  $t_e = 0.95$ ,  $t_e = 1.0$  и  $t_e = 1.05$  нс.

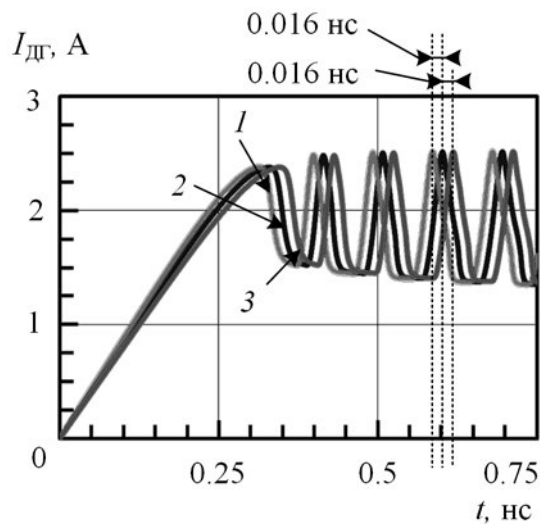


Рисунок 2.17 — Временной профиль тока диода Ганна для схемы с резистивной нагрузкой при различных значениях переднего фронта импульса напряжения модулятора.

При вариации длительности фронта  $t_e = 1$  нс на величину  $\Delta t_e = \pm 0.05$  нс время запаздывания колебаний полного тока показывает разброс  $\Delta t_{ph} = \pm 0.016$  нс. Следовательно, относительное значение вариации фронта на уровне  $\sim 10\%$ , приводит к  $3.2\%$  разбросу времени старта СВЧ-колебаний.

Исходя из представленных результатов численного моделирования автогенератора на диоде Ганна, были сделаны выводы о том, что фазовая нестабильность СВЧ-колебаний при различных длительностях фронтов напряжения модулятора определяется нестабильностью его амплитуды. Стабильная амплитуда импульса модулирующего напряжения позволяет сгенерировать колебания с выраженной управляемой фазой при длительностях фронтов, существенно превышающих период колебаний. Полученный результат имеет решающую важность для создания массивов генераторов Ганна, импульсно-синхронизированных по фазе.

Как в [255], так и в работах автора данной диссертации, локально-полевая математическая модель используется для проведения серии расчётов автогенератора на диоде Ганна, находящемся в резонаторе с распределёнными электрофизическими параметрами [67, 90, 99]. Для учёта взаимосвязи электрического поля СВЧ-резонатора с процессами в полупроводниковой структуре диода Ганна, электрическая цепь дополнялась колебательным контуром на сосредоточенных элементах. Выбиралась эквивалентная схема замещения, которая позволяла детально учитывать ключевые особенности электродинамической структуры автогенератора, например, схемы возбуждения СВЧ-колебаний различных типов для разных частот. В процессе вычислений была выполнена оптимизация некоторых компонентов схемы замещения с целью получения

на нагрузке достаточно выраженных синусоидальных колебаний с частотой  $\sim 10$  ГГц, что соответствовало экспериментальным условиям [255]. Незначительные различия в методологии данных расчётов по сравнению с вышеупомянутой численной схемой заключались в том, что система уравнений метода линий (2.65) дополнялась системой дифференциально-алгебраических уравнений Кирхгофа для эквивалентной электрической цепи на сосредоточенных элементах. Полученная в результате система уравнений решалась либо совместно, либо последовательно, разделяя решение уравнения (2.65) и уравнений Кирхгофа на малом временном шаге, с использованием библиотечных решателей обыкновенных дифференциальных уравнений. Расширенная формулировка модели и обобщающие выводы, касающиеся данной физической проблемы излагаются в [255].

При всей простоте численных методов, которые используются для моделирования поведения электрического поля в активной области диодов Ганна, полученные результаты обладают высокой степенью достоверности и точности. В значительной степени это обстоятельство объясняется отсутствием нефизических артефактов решения  $E(x, t)$ , характерных для использования центральных разностей при аппроксимации конвективных слагаемых в (2.60), что, в свою очередь, объясняется значительным вкладом диффузионной составляющей потока электронов в динамику формирования доменов сильного поля. Неоднородности скачкообразных изменений электрического поля, обусловленные нелинейной конвекцией, сглаживаются за счёт значительного вклада тока диффузии электронов в структуре полупроводника. По этой причине использование более сложных алгоритмов численного расчёта, а также искусственных приёмов типа введения численной диффузии лишено смысла при исследовании локально-полевой модели аналогичной данной.

В отличие от рассмотренного выше примера, моделирование плазмы газового разряда в задачах, занимающих значительную часть данной диссертации, представляет собой намного более сложный процесс, поскольку плазма состоит из нескольких компонент, динамика которых при общем рассмотрении преимущественно конвективная. С позиции классической вычислительной гидродинамики можно говорить о гидродинамическом (“жидкостном”) моделировании плазмы как о расчёте многокомпонентных течений с высокими числами Пекле [267]. Это обстоятельство приводит к тому, что для описания многокомпонентной плазмы газового разряда приходится применять весь спектр современных численных методов, краткий обзор которых даётся выше.

## 2.3 Методы численного решения уравнения Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана (1.15) с точки зрения математической физики представляет собой интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, которое может включать нелинейности, обусловленные зависимостью коэффициентов при частных производных от значения функции распределения. Дополнительные нелинейности могут содержаться в интегралах столкновений в правой части уравнения. Основным инструментом исследования моделей классической и квантовой физической кинетики является численный анализ. Это объясняется тем, что возможности построения аналитических и асимптотических решений кинетического уравнения Больцмана существенно ограничены. Фактически, они исчерпываются рассмотрением лишь простейших случаев, описание которых в настоящее время не имеет фундаментальной и практической значимости для изучения проблем кинетики газовых и вакуумных разрядов различных видов. Например, полученное А.В. Гуревичем и К.П. Зыбиным в работе [55] асимптотическое решение кинетического уравнения для быстрых электронов в веществе с подробными выражениями для интегралов упругих соударений и ионизационных потерь, позволяет лишь сформулировать критерий пробоя на убегающих электронах в однородном случае. Однако по мнению тех же авторов работы [55] данный критерий также может быть получен просто из элементарной теории, т.е. вообще без использования уравнений физической кинетики (см. работу [214]).

Непосредственное численное решение кинетического уравнения представляет вычислительную задачу высокой сложности. Среди основных трудностей, с которыми приходится сталкиваться при численном решении уравнения Больцмана, можно отметить следующие:

- *Размерность*: Функция распределения  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ , в наиболее общем случае, определена на шестимерном фазовом пространстве, при этом диапазоны координат трёх измерений скорости (или импульса) не ограничены  $-\infty < |\vec{v}| < \infty$ . Обобщённая форма интеграла столкновений также содержит пятимерную операцию интегрирования для каждой точки в шестимерном фазовом пространстве задачи. Формальное количество вложенных циклов при написании программного кода в таком случае будет равно одиннадцати. Для сравнения, в настоящее время трёхмерные задачи среднего разрешения представляют собой основную трудность для численного решения на современных суперкомпьютерах;
- *Временной шаг*: Левая часть уравнения Больцмана представляет собой уравнение переноса в фазовом пространстве (уравнение Власова), в то время как правая часть содержит интегралы столкновений. Данная особенность требует различных подходов при выборе временного шага. Существующие схемы решения уравнения Власова позволяют

выбирать временной шаг задачи существенно больше значения, определяемого критерием Куранта для явной разностной схемы. Добавление же ненулевой правой части (интегралов столкновений) приводит к тому, что для достижения приемлемых значений относительной точности решения временной шаг приходится задавать существенно меньше курантовских значений. С феноменологической точки зрения, данная проблема объясняется невозможностью введения малых порций столкновений в рассматриваемую бесстокновительную физическую систему;

- *Интегралы столкновений*: Интегралы столкновений представляют собой результат действия нелокального интегрального оператора на функцию распределения. Их общий вид достаточно сложен для непосредственной численной реализации, но существенное упрощение формулировки интегралов столкновений далеко не всегда приводит к стабилизации и упрощению численного решения уравнения Больцмана, в то время как физическая составляющая задачи при этом может быть упрощена чрезмерно;
- *Ударные фронты и неотрицательность решения*: Хотя численное решение левой (транспортной) части уравнения Больцмана и не занимает основное вычислительное время, тем не менее, оно далеко не тривиально, поскольку должно обеспечивать неотрицательность функции распределения и корректное описание ударных фронтов, присутствующих в решении многомерного уравнения гиперболического типа.

Построение численной схемы решения целевого уравнения Больцмана, вернее сказать, системы уравнений Максвелла-Больцмана, предполагает проведения верификации схемы на разных этапах. Начальная проверка работоспособности кода может быть протестирована на примере бесстокновительной физической системы, например, в качестве инструмента для решения фундаментальных задач вакуумной электроники. В отсутствие интеграла столкновений численная схема будет представлять собой решение системы уравнений Власова-Максвелла или Власова-Пуассона. Помимо сравнения результатов расчёта с имеющимися экспериментальными данными, получаемая функция плотности должна обладать некоторыми фундаментальными свойствами. В частности, должна выполняться инвариантность общего числа частиц, полной энергии системы, а также сохранение  $L^p$  нормы функции плотности.

Ниже будет дано детальное описание основных численных методов, используемых для решения общей системы уравнений Больцмана-Максвелла в данной главе, а также системы Власова-Пуассона, которая используется в задачах вакуумной электроники. Предложенные методы являются логическим развитием численных методов для решения изолированного уравнения Власова. В качестве основного рабочего инструмента численного анализа в диссертации применяются так называемые *полу-Лагранжевы методы*. Они представляют собой базовый подход к решению уравнения Власова из-за



своей высокой количественной точности и отсутствия цифрового шума, присущего например методу макрочастиц. По своей сути полу-Лагранжевые методы являются сеточными разностными схемами в фазовом пространстве, поэтому они требуют значительных вычислительных ресурсов для многомерных задач. Отличие указанных методов от классических сеточных методов, широко применяемых для решения систем уравнений в частных производных, заключается в том, что полу-Лагранжевые методы используют решение скалярных гиперболических уравнений в характеристиках для дальнейшего получения пошаговых решений целевого уравнения (Власова или Больцмана).

### 2.3.1 Расщепление уравнения Больцмана

Выше отмечалось, что решение полного уравнения Больцмана (1.15) представляет собой крайне нетривиальную задачу: транспортная (уравнение Власова) и столкновительная части должны вычисляться на заданном временном интервале различным образом. Исходя из этого мы приходим к необходимости учитывать бесстолкновительную и столкновительные части по отдельности. Если подобная схема будет разработана, то можно сделать попытку соединить обе части метода воедино для построения полной схемы решения уравнения Больцмана. Разделение уравнения Больцмана с последующим изолированным решением также актуально из-за возможности использования решения бесстолкновительной (транспортной) части для широкого круга задач вакуумной электроники, физики пучков и задач бесстолкновительной плазмы.

Представим уравнение Больцмана (1.15) в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{A}f + \hat{B}f, \quad (2.67)$$

где

$$\hat{A}f \equiv -\vec{v} \cdot \nabla f - \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{H}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}, \quad \hat{B}f \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c.$$

Отдельно транспортная бесстолкновительная часть уравнения (2.67) (уравнение Власова) имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{A}f, \quad (2.68)$$

а учёт столкновений описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{B}f. \quad (2.69)$$

К сожалению, не существует корректного простого способа свести решение (2.67) к изолированному решению (2.68) и (2.69). Например, если функция  $f_1$  - решение (2.68), а  $f_2$  - решение (2.69), то их суперпозиция  $f_1 + f_2$  не является решением (2.67), за исключением случая, когда  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  линейны и  $\hat{A}f_2 = -\hat{B}f_1$ . Даже если пренебречь нелинейностью уравнения Больцмана, то добиться выполнения условия  $\hat{A}f_2 = -\hat{B}f_1$  невозможно.

С другой стороны, формальное решение (2.67) на малом временном шаге  $\Delta t$  в последующий момент времени  $t + \Delta t$  представимо в виде

$$f(t + \Delta t) = e^{\Delta t(\hat{A} + \hat{B})} f(t). \quad (2.70)$$

Как уже говорилось выше, возможность факторизации экспоненты  $e^{\Delta t(\hat{A} + \hat{B})} = e^{\Delta t \hat{A}} e^{\Delta t \hat{B}}$  позволяла бы свести решение уравнения Больцмана к последовательному решению транспортного уравнения и уравнения для столкновений. Однако ввиду некоммутативности операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  данная факторизация будет иметь только первый порядок точности по отношению к малому параметру временного шага  $\Delta t$ , т.е.  $e^{\Delta t(\hat{A} + \hat{B})} = e^{\Delta t \hat{A}} e^{\Delta t \hat{B}} + O(\Delta t)$ . Для увеличения точности метода, Г. Странгом [268] было предложено использовать следующую факторизацию:

$$e^{\Delta t(\hat{A} + \hat{B})} = e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{A}} e^{\Delta t \hat{B}} e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{A}} + O(\Delta t^2), \quad (2.71)$$

имеющую второй порядок точности по времени, в чём можно убедиться непосредственным разложением левой и правой части выражения (2.71) в ряды Тейлора, ограничившись при этом только квадратичными по  $\Delta t$  слагаемыми:

$$\begin{aligned} e^{\Delta t(\hat{A} + \hat{B})} &= \hat{I} + \Delta t(\hat{A} + \hat{B}) + \frac{\Delta t^2}{2}(\hat{A} + \hat{B})^2 + O(\Delta t^3) \\ e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{A}} e^{\Delta t \hat{B}} e^{\frac{\Delta t}{2} \hat{A}} &= \left( \hat{I} + \frac{\Delta t}{2} \hat{A} + \frac{\Delta t^2}{4} \hat{A}^2 + O(\Delta t^3) \right) \cdot \\ &\cdot \left( \hat{I} + \Delta t \hat{B} + \Delta t^2 \hat{B}^2 + O(\Delta t^3) \right) \left( \hat{I} + \frac{\Delta t}{2} \hat{A} + \frac{\Delta t^2}{4} \hat{A}^2 + O(\Delta t^3) \right) = \\ &= \hat{I} + \Delta t(\hat{A} + \hat{B}) + \frac{\Delta t^2}{2}(\hat{A}^2 + \hat{B}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Наиболее важным свойством полученной факторизации является возможность обобщения её на произвольное количество операторов. В общем случае, если вместо  $\hat{A} + \hat{B}$  мы имеем сумму  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n$ , то соответствующее формальное решение второго

порядка по временной переменной будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= e^{\Delta t(\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \dots + \hat{A}_n)} f(t) = \\ &= e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}_1} \dots e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}_{n-1}} e^{\Delta t\hat{A}_n} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}_{n-1}} \dots e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}_1} f(t) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Метод *расщепления Странга* [268] является наиболее часто применяемым при решении уравнений Власова и Больцмана. Существуют также методы более высоких порядков, однако все они, как правило, представляют собой намного более сложные численные схемы, которые не дают некой экстраординарной точности. В работе [269] предлагаются следующие схемы третьего и четвертого порядков, соответственно:

$$f(t + \Delta t) = \left( \frac{4}{3} e^{\frac{\Delta t}{4}\hat{A}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{B}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{B}} e^{\frac{\Delta t}{4}\hat{A}} - \frac{1}{3} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}} e^{\Delta t\hat{B}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}} \right) f(t) + O(\Delta t^3), \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t) &= \frac{2}{3} \left( e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}} e^{\Delta t\hat{B}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{A}} + e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{B}} e^{\Delta t\hat{A}} e^{\frac{\Delta t}{2}\hat{B}} \right) f(t) - \\ &\quad - \frac{1}{6} \left( e^{\Delta t\hat{A}} e^{\Delta t\hat{B}} + e^{\Delta t\hat{B}} e^{\Delta t\hat{A}} \right) f(t) + O(\Delta t^4) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Также при необходимости получить ещё более высокий порядок временного разрешения, метод расщепления второго порядка возможно реализовать рекуррентным образом в виде многократного факторизованного произведения экспонент от каждого оператора, взятых с некоторыми постоянными коэффициентами. Для этого экспонента суммы операторов (2.71) разлагается по формуле Беккера-Кэмпбелла-Хаусдорфа до более высоких порядков, в результате чего получившийся оператор представляет собой симметричное относительно  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  выражение, дающее четвёртый, восьмой и т.д. порядки точности. Более подробно техника факторизации представлена в работе [270].

В данной диссертационной работе используется только расщепление Странга (2.71), хотя для верификации получаемых результатов, в ряде работ автора дополнительно применялась схема четвертого порядка точности (2.73). Как отмечалось ранее, методы более высокого временного разрешения не давали значительных улучшений показателей относительной точности, а также не позволяли задавать больший временной шаг. Кроме того, их применение значительно увеличивает вычислительную нагрузку, поскольку требует многократного вычисления интегралов столкновений на каждом временном шаге.

### 2.3.2 Методы решения транспортного уравнения (Власова)

В данном разделе кратко излагаются принципы построения численных схем, которые используются для решения транспортного уравнения (уравнения Власова) (2.68),

полученного после расщепления уравнения Больцмана (2.67). Его можно представить в краткой нотации:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \vec{L} \cdot \nabla_v f = 0, \quad (2.74)$$

где  $\nabla_x$  и  $\nabla_v$  - операторы градиента, действующие на координаты и скорости, соответственно,  $\vec{L}$  - электромагнитная сила Лоренца.

Уравнение (2.74) представляет собой обычное уравнение переноса, которое сформулировано в шестимерном  $(\vec{x}, \vec{v})$  фазовом пространстве. Оно также является нелинейным, поскольку электромагнитная сила  $\vec{L}$  неявным образом зависит от значения функции распределения  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ .

Решение уравнения Власова представляет собой функцию плотности, которая должна удовлетворять требованию неотрицательности  $f(\vec{x}, \vec{v}, t) \geq 0, \forall \vec{x}, \vec{v}, t$ , а также обеспечивать сохранение массы  $\int f d^3 v d^3 x$ , импульса  $\int \vec{v} f d^3 v d^3 x$  и  $\int |\vec{v}|^2 f d^3 v d^3 x$ . Именно ограничения, накладываемые такими требованиями к функции распределения, не позволяют применять для решения уравнения Власова хорошо зарекомендовавшие себя общие численные методы для гиперболических уравнений, в частности и те, которые были подробно изложены в разделе 2.2.

Само по себе численное решение шестимерной задачи является исключительно сложной задачей, из-за чего мы снова можем воспользоваться принципом расщепления операторов, применив его к уравнению (2.74), в результате чего получим набор уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_x f = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{L} \cdot \nabla_v f = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

Так как скорость  $\vec{v}$  не зависит от координаты  $\vec{x}$  и сила  $\vec{L}$  не зависит от скорости, то каждое из шести уравнений (2.75) является скалярным гиперболическим уравнением вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial x} = 0, \quad (2.76)$$

которое записано в обобщённом консервативном виде, несмотря на то, что скорость не зависит от координаты и времени.

Будем решать уравнение (2.76) аналитически, используя метод характеристик. Если для дискретного момента времени  $t^n$  известно решение  $f(x, t^n)$ , то можно легко записать решение на следующем шаге  $t^{n+1}$  как

$$f(x, t^{n+1}) = f(X(t^n; t^{n+1}, x), t^n), \quad (2.77)$$

где  $\frac{dX(s)}{ds} = v(X(s), s), \quad X(t^{n+1}) = x.$

Смысл  $X(t^n; t^{n+1}, x)$  понятен интуитивно - это начальное положение в момент времени  $t^n$  частицы, которая приходит в точку  $x$  в момент времени  $t^{n+1}$  под действием поля скорости  $v$ .

Во всех расчётах, результаты которых приводятся для гибридных кинетических и полных кинетических моделей, в данной диссертационной работе использован так называемый обратный полу-Лагранжевый метод (backward semi-Lagrangian method). Он основан на трассировке характеристики (2.77) назад во времени, т.к. общее аналитическое решение уравнения (2.76) имеет вид  $f = f(x - vt)$ . Процедура для заданного набора значений  $\{f(t^n, x_i)\}_{i \in I}$  будет выглядеть следующим образом:

- Следуя характеристике, рассчитывается значение  $\{X(t^n; t^{n+1}, x_i)\}_{i \in I}$ , используя формулу (2.77). Другими словами для точки  $x_i$  вычислить новое значение аргумента общего решения  $\tilde{x} = x_i - v(t^{n+1} - t^n)$ ;
- Интерполируется значение функции общего решения в точке  $\tilde{x}$ , используя известные значения  $\{f(t^n, x_i)\}_{i \in I}$  так, что  $f(t^{n+1}, x_i) = f(t^n, X(t^n; t^{n+1}, x_i))$ .

В отличие от первого шага, не представляющего никаких сложностей ввиду того, что скорость не зависит от координаты, второй шаг схемы - интерполяция - весьма нетривиален. Это объясняется тем, что интерполяция должна иметь достаточно высокую точность и не приводить к появлению нефизических артефактов, например, отрицательных значений функции распределения. В качестве основных инструментов интерполяции используются процедуры Лагранжа, Эрмита и методы переменного порядка, известные как PWENO (pointwise WENO), являющиеся разновидностями методов группы WENO.

Основным инструментом интерполяции для решения транспортной части уравнения Больцмана в данной диссертационной работе является метод интерполяции кубическими сплайнами, впервые предложенный Ченгом и Кнорром в работе [271]. Данный метод обеспечивает хорошее соблюдение законов сохранения, а также низкий уровень возникающих отрицательных значений функции распределения. Иногда метод Ченга-Кнорра ошибочно относят к семейству методов интерполяции Лагранжа, которые также могут быть применены для решения уравнения Власова. В них для полиномиальной интерполяции  $(2m + 1)$ -го порядка функции  $f(t^n, x)$  мы сначала находим целочисленное значение  $i$  такое, что  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , а затем используем интерполяцию Лагранжа, имеющую порядок  $2m + 1$  в центрированном шаблоне  $\{x_{i-m}, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+m-1}\}$

$$f(x) = f(t^n, x_{i-m}) + \sum_{k=1}^{2m+1} f[x_{i-m}, \dots, x_{i-m+k}] \prod_{s=0}^k (x - x_{s-m+1}) \quad (2.78)$$

где  $f[x_i, \dots, x_{i+p}] = \frac{1}{p!} \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+p}] - f[x_i, \dots, x_{i+p-1}]}{x_{i+p} - x_i}$ .

Более корректно относить метод Ченга-Кнорра к методу интерполяции Эрмита, который использует не только значения функции в узлах сетки, но и значения её производных (в данном случае первых). Конкретнее, метод Ченга-Кнорра представляет собой интерполяцию значения функции  $f(x) \approx \tilde{f}_i \equiv f(x_i + \delta\Delta x)$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$  ( $\Delta x$  - шаг равномерной пространственной сетки) кубическими сплайнами, которая производится по следующей формуле

$$f(x) = [s_i\delta(1 - \delta)^2 - s_{i+1}(1 - \delta)\delta^2]\Delta x + f_i(1 - \delta)^2(1 + 2\delta) + f_{i+1}\delta^2[1 + 2(1 - \delta)], \quad (2.79)$$

где значения производных  $s_i$  определяются из решения следующей трёхдиагональной системы

$$s_{i-1} + 4s_i + s_{i+1} = (3/\Delta x)(f_{i+1} - f_{i-1}),$$

а граничные значения функции и её производных определяются конкретными условиями решаемой задачи.

Для начального тестирования численных алгоритмов, используемых для решения уравнений Больцмана и Власова, автором данной диссертации также был реализован простой метод линейной интерполяции  $f(x) \approx \tilde{f}_i = f_i + \delta(f_{i+1} - f_i)$ . Данная схема удобна тем, что является априори положительно знакоопределённой. Однако её практическое применение для решения транспортного уравнения ограничивается лишь верификацией работы общей вычислительной схемы, поскольку линейная интерполяция не обеспечивает должной точности, приводя к значительной диффузии функции распределения в фазовом пространстве, что выражается в несоблюдении законов сохранения.

Дополнительная верификация некоторых окончательных результатов, представленных в диссертации, осуществлялась методами CIP (Накамуры-Ябе) [272], а также наиболее современным полу-Лагранжевым методом переменного порядка SL-WENO-5 [273]. Данная проверка показала, что алгоритм Ченга-Кнорра даёт хорошее пространственно-временное разрешение для получаемой функции распределения электронов как в задачах вакуумной электроники, так и при решении уравнения Больцмана для убегающих электронов в газовых разрядах.

### 2.3.3 Учёт столкновений и общая стратегия построения численной схемы решения уравнения Больцмана

В результате расщепления уравнения Больцмана (2.67) его столкновительная часть была выделена в виде отдельного дифференциального уравнения (2.69). Полученное

уравнение локально по координате  $\vec{x}$ , так как не содержит производных по пространственной координате. Это означает, что для двух пространственных положений  $\vec{x} \neq \vec{x}^*$ , вычисление функций распределений  $f(\vec{x})$  и  $f(\vec{x}^*)$  производится независимо друг от друга. Соответственно, мы можем ограничить рассмотрение метода решения уравнения (2.69), зафиксировав пространственное положение интеграла столкновений в произвольной точке пространства.

Существуют кинетические теории, например пробоя газа на убегающих электронах [55], которые содержат полные формы интегралов соударений быстрых электронов в веществе, включающих потери энергии и рассеяние быстрых электронов вследствие столкновений с молекулами, ионизационные потери и даже рождение электрон-позитронных пар. Каждый из данных слагаемых в  $Q(f) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c$  представляет собой многократный интеграл по пространству скоростей (или импульсов) от выражения, содержащего линейную комбинацию дифференциального сечения, функций распределения, членов прихода и ухода частиц. Характер сечения (например, для кулоновского рассеяния) приводит к появлению сильных сингулярностей в кинетическом уравнении, для анализа и устранения которых должны применяться дополнительные методы. Все эти обстоятельства делают учёт “столкновительной” части уравнения Больцмана крайне сложной в численных расчётах, поэтому итогами работы [55] стало простое приближённо-аналитическое асимптотическое решение, которое не даёт достаточной информации о пространственно-временной структуре потока убегающих электронов.

В данной диссертационной работе используются упрощённые формы записи интегралов упругих и неупругих столкновений, облегчающие формулировку модели без потери значительной части информации об этих элементарных процессах. В отличие от работы [55], упрощённые интегралы столкновений позволяют получить нестационарную динамику функции распределения для конкретных вычислительных задач, не ограничиваясь только простейшими асимптотическими решениями. Одним из наиболее часто используемых приёмов упрощения является аппроксимация интегралов столкновений в форме БГК (Батнагара-Гросса-Крука или кратко, в форме оператора Крука) [274]. Данное упрощение базируется на физическом принципе, согласно которому столкновения за времена порядка времён релаксации  $\tau$  приводят систему частиц к некоему равновесному состоянию, характеризуемому функцией распределения  $f_\infty$ . В результате упрощения можно записать интеграл столкновения в следующей форме

$$Q^{\text{BGK}}(f) = \frac{1}{\tau}(f_\infty - f). \quad (2.80)$$

В рамках данной диссертационной работы рассматриваются только одномерные и одномерно-осесимметричные задачи без магнитного поля. В них нерелятивистское кинетическое уравнение Больцмана имеет следующий вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (2.81)$$

где функция распределения  $f(x, v, t)$  зависит от пары координат в фазовом пространстве и от времени. Для осесимметричного случая мы имеем аналогичное уравнение, с той только разницей, что обозначение пространственной декартовой координаты  $x$  заменяется на радиальную  $r$ . Принцип решения релятивистских уравнений находится в полной аналогии с изложенным ниже для нерелятивистского случая.

Исходя из того, что нам предстоит получить численное решение одномерного кинетического уравнения, все задачи можно разделить на две группы. К первой группе причисляются те задачи, в которых уравнение (2.81) решается с заданным нестационарным распределением электрического поля  $E \equiv E(x, t)$ . Вторая группа основана на совместном численном решении системы уравнений Максвелла-Больцмана. Примером такой системы является полностью кинетическая модель быстрого газового разряда (см. Главу 5). В качестве дополнительного уравнения все одномерные модели будут содержать закон Ампера (уравнение баланса полного тока):

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} v f(x, v, t) dv = \frac{j(t)}{\varepsilon_0}, \quad (2.82)$$

где  $j(t)$  - полная плотность тока, определяемая внешней электрической цепью.

После уточнения параметров математической модели и ограничения круга используемых численных методов можно приступить непосредственно к численному решению уравнения (2.81), либо системы уравнений (2.81)-(2.82). Вначале производится дискретизация фазового пространства задачи. Пространственный интервал заполняется равномерной или квазиравномерной сеткой (см. Раздел 2.2.1) аналогично тому, как это продельвается для гидродинамических моделей. Иначе обстоит ситуация с пространством скоростей (или импульсов), рассматриваемый интервал в котором формально неограничен, т.е.  $-\infty < v < \infty$ . Поскольку рассмотрение бесконечных промежутков требовало бы бесконечного объёма оперативной памяти, то расчётный интервал ограничивают некоторым фиксированным, максимально допустимым значением скорости  $v_{\max}$ . Данное значение выбирается исходя из предполагаемых физических условий задачи, чаще всего  $v_{\max}$  устанавливается кратным значению скорости, до которой может быть



ускорен одиночный электрон в отсутствии соударений, т.е. соответствующей напряжению, приложенному к промежутку. Во всех работах, опубликованных по тематике диссертации, для дискретизации интервала  $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$  используется равномерная сетка. Количество интервалов разбиения определяется ещё одним физическим параметром - минимальной характерной энергией в задаче. Как правило, размер ячейки сетки достаточно взять равным или меньше значения скорости  $v_{\min} = \sqrt{2\epsilon_i/m}$ , где  $\epsilon_i$  - энергия ионизации нейтральных частиц электронным ударом, если рассматриваются газовые разряды. Для моделирования процессов вакуумной электроники  $\epsilon_i$  следует брать меньше значения теплового разброса инжектируемого пучка, либо температуры эмитированных с катода электронов. Ограничение вычислительного фазового пространства задачи приводит к необходимости также вводить граничные условия на концах интервала скоростей (импульсов)  $f(x, |v| = v_{\max}) = 0$ . Они представляют собой обнуление значений функции распределения, находящихся за пределами интервала  $v \in [-v_{\max}, v_{\max}]$ .

Две другие границы области счётного фазового пространства - катод и анод - также не вычисляются в рамках метода, поэтому на них требуется задавать граничные условия для функции распределения. Стандартные условия на катоде могут варьироваться в зависимости от конкретной постановки задачи. Как правило, эмиссия с катода задаётся в виде профиля функции распределения, зависящей от скорости  $f(x = 0, v, t) = f_M(v)$  (условие Дирихле), либо, когда эмиссионные свойства катода не уточняются, ставятся нулевые условия Неймана  $\partial f(x = 0, v, t)/\partial x = 0$ . На аноде, для всех задач, рассматриваемых в диссертации задаются нулевые условия Неймана  $\partial f(x = d, v, t)/\partial x = 0$ , которые делают правую границу “прозрачной” для электронов.

В качестве начальных условий для уравнения Больцмана выбирается распределение Максвелла, согласованное с граничными условиями. В ряде задач используется пространственно-неоднородная функция распределения Максвелла, соответствующая распределению концентрации электронов, сосредоточенному у катода (в осесимметричной одномерной задаче)  $n_0(r) \sim \exp(-\beta r^2/r_a^2)$ , где  $\beta$  - параметр неоднородности,  $r$  - радиальная координата,  $r_a$  - радиус анода. Начальная функция нормируется так, чтобы общее число частиц не менялось при вариации параметра неоднородности  $\beta$ .

В целом, численная схема для решения одномерной системы уравнений Максвелла-Больцмана построена аналогично работам [275, 276]. Систему уравнений (2.81)-(2.82) можно записать в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \equiv \sum_{j=1}^4 \mathfrak{Y}_j[Z], \quad (2.83)$$

где векторы  $Z = (f, E)$  и

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}_1[Z] &= \left(-v \frac{\partial f}{\partial x}, 0\right), \quad \mathfrak{Y}_2[Z] = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, 0\right), \\ \mathfrak{Y}_3[Z] &= \left(0, \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} v f dv + \frac{j(t)}{\varepsilon_0}\right), \quad \mathfrak{Y}_4[Z] = \left(-\frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial v}, 0\right).\end{aligned}\quad (2.84)$$

Применяя к данной системе (2.83) расщепление Странга получаем

$$\Phi_{\mathfrak{Y}}^{\Delta t}[Z_0] = \Phi_{\mathfrak{Y}_1}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_2}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_3}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_4}^{\Delta t} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_3}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_2}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_1}^{\Delta t/2}[Z_0] + O(\Delta t^2), \quad (2.85)$$

где оператор эволюции  $\Phi$  преобразует начальные данные на текущем временном шаге  $Z(t) \equiv Z_0$  в значения на последующем шаге

$$Z(t + \Delta t) = \Phi_{\mathfrak{Y}}^{\Delta t}[Z_0], \quad (2.86)$$

причём операторы комбинируются следующим образом  $\Phi_x \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}}(x) \equiv \Phi_x(\Phi_{\mathfrak{Y}}(x))$ .

Действие операторов  $\mathfrak{Y}_1$  и  $\mathfrak{Y}_4$  ассоциируется с применением интерполяции кубическими сплайнам по методу Ченга-Кнорра, который не накладывает каких-либо ограничений на временной шаг схемы. Исходя из того, что шаг полу-Лагранжевых методов не ограничен критерием Куранта, сам выбор шага диктуется только требованиями, предъявляемыми к абсолютной и относительной точности нестационарного решения. Операторы  $\mathfrak{Y}_2$  и  $\mathfrak{Y}_3$  осуществляют решение уравнений (2.69) и (2.82) методом Эйлера, выполненным в два этапа на каждом временном шаге. Выбор данного метода первого порядка точности значительно ограничивает величину временного шага, но на практике требование к общей точности нестационарного решения приводит к уменьшению значения шага и для решения транспортного уравнения. Использование общих методов более высокого порядка точности, например, Рунге-Кутты или Адамса-Башфорта, нарушает принцип неотрицательности функции распределения, поэтому подобные методы здесь не применимы.

Рассмотрим первую группу задач, где уравнение Больцмана решается в предположении, что распределение электрического поля  $E(x, t)$  уже известно: например, оно существует в виде решения уравнения Пуассона в квадратурах. Тогда уравнение (2.81) в форме (2.83) примет вид

$$\frac{\partial Z}{\partial t} \equiv \sum_{j=1}^3 \mathfrak{Y}_j[Z], \quad (2.87)$$

где векторы  $Z = (f, E)$  и

$$\begin{aligned}\mathfrak{Y}_1[Z] &= \left(-v \frac{\partial f}{\partial x}, 0\right), \quad \mathfrak{Y}_2[Z] = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c, 0\right), \\ \mathfrak{Y}_3[Z] &= \left(-\frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial v}, 0\right).\end{aligned}\tag{2.88}$$

На малом временном шаге благодаря (2.88) мы получаем решение (2.86), где оператор эволюции  $\Phi$  представляет собой следующее выражение после применения (2.87) расщепление Странга:

$$\Phi_{\mathfrak{Y}}^{\Delta t}[Z_0] = \Phi_{\mathfrak{Y}_1}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_2}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_3}^{\Delta t} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_2}^{\Delta t/2} \bullet \Phi_{\mathfrak{Y}_1}^{\Delta t/2}[Z_0] + O(\Delta t^2).\tag{2.89}$$

В численной схеме (2.89) отсутствует вычисление электрического поля прямым методом Эйлера на каждом шаге, что значительно повышает стабильность вычислений. Однако решение кинетического уравнения для электронов в заданном электрическом поле, как и решение более общей задачи (2.81)-(2.82) можно сделать ещё более устойчивым, если удастся отыскать аналитическое решение уравнения (2.69) с правой частью в виде упрощённого интеграла столкновений. Для (2.80) поиск аналитического решения не представляет труда:

$$f(x, v, t) = f_{\infty} + \exp(t/\tau)(f(x, v, t = 0) - f_{\infty}).$$

Далее, полученным точным решением можно воспользоваться, исключив оператор  $\mathfrak{Y}_2[Z]$  из вычисления  $\Phi$ .

### **2.3.4 Апробация численных методов решения кинетического уравнения на тестовых задачах вакуумной электроники**

Для тестирования методологии численного решения уравнения Больцмана, на начальном этапе необходимо провести верификацию схем решения транспортной части кинетического уравнения (уравнения Власова), поскольку данная процедура, как было показано выше, является важной составляющей численного решения кинетического уравнения с ненулевыми интегралами столкновений. Наряду с проверкой численных схем для решения уравнения Власова на большом наборе стандартных тестовых задач (затухания Ландау, двухпоточковой неустойчивости и пр.), автором диссертации был дополнительно выбран ряд простых задач нерелятивистской вакуумной электроники [68, 106].

В одном пространственном измерении рассмотрение нестационарных процессов транспортировки пучков электронов с позиции физической кинетики описывается системой нерелятивистских уравнений Власова-Пуассона, которая при отсутствии внешнего магнитного поля имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - qE \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f dv, \quad E = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{cases}, \quad (2.90)$$

где  $f \equiv f(x, v, t)$  - функция распределения электронов,  $E$  - напряжённость электрического поля,  $x$  - пространственная координата,  $v$  - скорость,  $\phi$  - электростатический потенциал.

Полагая, что пространственная область ограничена промежутком  $x \in [0, d]$ , на границах которой заданы некоторые постоянные потенциалы, которые можно без потери общности считать следующими  $\phi(x = 0) = 0$ ,  $\phi(x = d) = U$ , то в одномерии уравнение Пуассона в декартовых координатах будет иметь следующее решение в квадратурах:

$$\begin{aligned} E(x, t) = -\frac{U}{d} \left[ 1 + \frac{dq}{\varepsilon_0 U} \int_0^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x', v, t) dv dx' - \right. \\ \left. - \frac{q}{\varepsilon_0 U} \int_0^d \int_0^{x'} \int_{-\infty}^{\infty} f(x'', v, t) dv dx'' dx' \right]. \end{aligned} \quad (2.91)$$

В работах [68, 106] начальные условия для уравнения Власова представляли собой неоднородное (максвелловское) распределение по скоростям  $f(x, v, t = 0) = f_M(x, v)$ , либо задавалось в виде прямоугольного профиля распределения по скоростям. Параметры обоих определялись исходя из постановки конкретной физической задачи, которую предстояло решать в рамках данного подхода. Граничное условие на катоде задавалось согласованным с начальным условием, т.е. в виде  $f(x = 0, v, t) = f_M(0, v)$ . Оно представляло собой модель физического процесса непрерывной эмиссии электронов с катода, либо инжекции электронов через сеточный катод-эмиттер.

Совместное решение системы уравнений Власова-Пуассона определяет состояние электронного ансамбля в фазовом пространстве в заданный момент времени. Наиболее важной наблюдаемой физической величиной в задачах вакуумной электроники является плотность тока электронов на аноде (коллекторе), которая определяется следующим

моментом функции распределения:

$$j(t) = q \int_{-\infty}^{\infty} f(x = d, v, t) v dv. \quad (2.92)$$

Непосредственное численное решение системы уравнений (2.90) осуществлялось сеточным обратным полу-лагранжевым методом (backward semi-Lagrangian) Ченга-Кнорра [271], подробно описанным выше. Также в работе [106] для верификации результатов полученных расчётов применялись более современные полу-лагранжевые методы - SL-WENO5 [273] и метод Накамуры-Ябе [272]. Для всех вычислений использовалось равномерное сеточное разбиение счётного фазового пространства. Значения функции распределения, соответствующие максимальным конечным значениям модуля скорости  $v_{\infty}$ , принудительно обращались в нуль для моделирования условий равенства нулю функции распределения частиц с “бесконечно-большими” скоростями

$$f(x, |v| \rightarrow \infty, t) \approx f(x, |v| = v_{\infty}, t) = 0.$$

Базовое разбиение состояло из  $N_x \times N_v = 1000 \times 1001$  прямоугольных элементов. Временной шаг численной схемы был фиксированной величины - 1 – 2 пс. Для проверки сходимости схемы увеличивалось количество разбиений  $N_x \times N_v$  вплоть до  $N_x \times N_v = 10000 \times 10001$ . Одновременно уменьшался и временной шаг с 1 – 2 пс до 10 фс. Моменты функции распределения и интегралы в выражении для электрического поля (2.91) вычислялись с использованием метода трапеций и при необходимости уточнялись с применением методов Симпсона или Уэддла [221, 277].

Возникновение и движение электронных пучков в ограниченных дрейфовых пространствах может приводить к возникновению релаксационных колебаний объёмного заряда. Характерные частоты этих колебаний придают прохождению тока резонансный характер. Релаксационные колебания проявляются в процессе перехода электронного потока из некоторого неустойчивого состояния в стационарную форму токопротекания. Простейшим примером, в котором возникают релаксационные колебания, является процесс установления тока в планарном вакуумном диоде.

Рассмотрим планарный вакуумный диод, расстояние между катодом и анодом которого равно  $d$ . В начальный момент времени к диоду прикладывается напряжение постоянной амплитуды  $U$ . Если считать эмиссионную способность катода неограниченной, то данная задача в её стационарной постановке представляет собой классический диод Чайлда-Ленгмюра [278, 279]. Плотность тока (в А/см<sup>2</sup>) через диод в стационарном

режиме даётся формулой

$$j_{\text{C.L.}} \approx 2.33 \cdot 10^{-6} \frac{U^{3/2}}{d^2}, \quad (2.93)$$

где приложенное напряжение  $U$  даётся в вольтах, а длина зазора  $d$  в сантиметрах. Для переходной области, в которой должны наблюдаться релаксационные колебания, существуют лишь некоторые оценки [280, 281], основанные на приближённо-аналитических решениях в рамках макроскопической теории данного явления. Например, в работе [281] приводятся результаты аналитических оценок всплеска плотности тока диода, которая происходит в момент достижения электронным пучком анода. Амплитуда плотности тока в этот момент максимальна и достигает значений, примерно равных  $\sim 2.75j_{\text{C.L.}}$ .

В качестве граничных условий на катоде для численного решения системы уравнений Власова-Пуассона использовалась как гладкая функция вида распределения Максвелла, так и ступенчатый прямоугольный профиль функции распределения, задаваемый следующей формулой:

$$f_M(x=0, v, t) = \frac{n_0}{|\delta v_i|} \Theta \left( \left( \frac{\delta v_i}{2} \right)^2 - (v - v_i)^2 \right), \quad (2.94)$$

где  $v_i \neq 0$  - скорость инжектируемых электронов,  $\delta$  - относительный разброс энергий электронов в инжектируемом пучке,  $n_0$  - концентрация электронов в пучке,  $\Theta$  - ступенчатая функция Хевисайда.

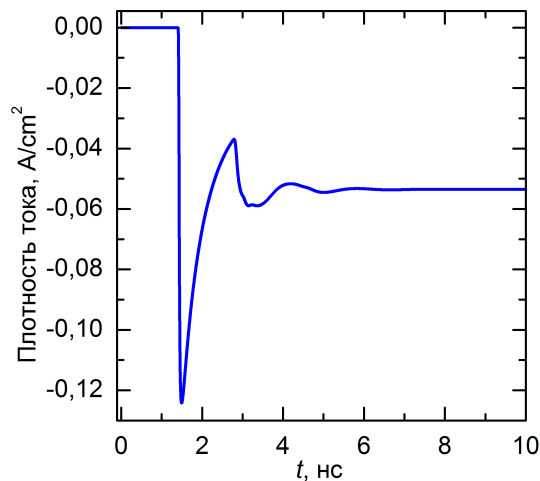


Рисунок 2.18 — Профиль плотности тока (на аноде) в диоде Чайлда-Ленгмюра, полученный методом непосредственного решения кинетического уравнения.

На рисунке 2.18 приведён временной профиль плотности тока на аноде полученный в результате решения системы уравнения Власова-Пуассона для вакуумного диода

с параметрами  $d = 2$  см,  $U = 2$  кВ. В качестве граничной функции распределения использовалось распределение Максвелла с тепловым разбросом  $kT_0 \sim 10$  эВ. Для моделирования неограниченной эмиссионной способности катода значение параметра  $n_0$  выбиралось так, чтобы ток эмиссии с катода превышал значение тока Чайлда-Ленгмюра в 50 раз. Рабочее значение временного шага метода составляло 1 – 2 пс.

Результаты, представленные на рисунке 2.18 иллюстрируют хорошее согласие с оценками, приведёнными в литературе как для области стационарного токопротекания, так и в переходной области. Значение стационарной плотности тока соответствует величине (2.93) и экспериментальному значению. Максимум в переходной области также близок к оценкам, данным в работах [280, 281]. Результаты не претерпевают заметных изменений при замене граничного условия на катоде с максвелловской функции на ступенчатую (2.94). В целом, характер полученных релаксационных колебаний подтверждает выводы, сделанные ранее в отношении данного явления в диссертации [282].

Другой важной задачей вакуумной электроники является задача об инжекции пучка электронов с энергией  $qU_{in}$  в эквипотенциальный промежуток  $d$  (эквипотенциальный диод), образованный двумя электродами равного потенциала - эмиттером и коллектором. При достаточно малых значениях тока инжекции  $j_{in} = qn_0\sqrt{2qU_{in}/m}$ , весь ток будет проходить промежуток вне зависимости от того, как распределён в нём объёмный заряд электронов. В этом случае поток электронов в диоде имеет одно направление. При увеличении тока инжекции возникает такая физическая ситуация, в которой создаваемый объёмный заряд будет препятствовать токопрохождению. Данное значение тока носит название “критического” (space-charge limit) [283], его плотность выражается через энергию инжектированного пучка следующим образом (в единицах А/см<sup>2</sup>)

$$j_{crit} = \frac{2.71 \cdot 10^3}{d^2} \left( \int_1^{1 + \frac{qU_{in}}{mc^2}} (\xi^2 - 1)^{-1/4} d\xi \right). \quad (2.95)$$

При достижении критического значения тока  $j_{crit}$ , скорость электронов в середине промежутка обращается в нуль. Поверхность, на которой скорость электронов равна нулю, а электростатический потенциал примерно равен ускоряющему потенциалу инжектируемого пучка  $U_{in}$ , называется “виртуальным катодом”. В условиях достижения током критического значения в диоде формируется двунаправленное движение электронов: одна часть отражается от виртуального катода, а другая часть проходит через него. Промежуток эмиттер-коллектор как бы разделяется виртуальным катодом на два вакуумных диода, в каждом из которых формируются релаксационные колебания, связанные с потоками пролётных и отражённых частиц. При релаксационных колебани-

ях, ассоциированных с отражёнными частицами, происходит формирование объёмных зарядов потоков обоих знаков, и колебания становятся незатухающими. Данная проблема известна также как задача о диоде Бурсиана [284]. Она широко исследовалась с использованием приближённо-аналитических методов в ряде работ, например [285], где детально изучались все режимы токопротекания в одномерной системе эмиттер-коллектор. Уникальным свойством данной системы является зависимость величины тока от энергии инжектируемых электронов. Данное свойство позволило использовать пучки в системах с виртуальным катодом для генерации мощных СВЧ-колебаний, нашедших применение в отражательных триодах и виркаторах [286].

В настоящем разделе диссертации мы остановимся на важном частном случае резонансного протекания тока в эквипотенциальном диоде, при котором ток инжектируемого пучка значительно превосходит критическое значение (2.95). В этом случае при инъекции моноэнергетического пучка будут наблюдаться незатухающие колебания тока коллектора. Если ток инъекции примерно в четыре раза превосходит критическое значение  $j_{in} \sim 4j_{crit}$ , то амплитуда автоколебаний достигает максимума, при этом амплитуда модуляции коллекторного тока может составлять несколько десятков процентов. Однако, если в инжектируемом пучке энергетический разброс частиц (тепловой spread)  $kT_0$  превысит 5 – 20 % (в среднем для осцилляторов с виртуальным катодом), то автоколебания полностью затухают, а токопротекание приобретает квазистационарный двухпоточный характер: электроны с большими энергиями проникают за виртуальный катод, с меньшими - отражаются назад. На это указывают теоретические исследования устойчивости данной проблемы, сделанные на основании теории динамических систем в работах [285, 287]. В плоском одномерном случае пороговое значение “размазки” функции распределения инжектируемого пучка по скоростям, при котором амплитуда автоколебаний резко уменьшается, составляет около 3 % [287]. При малых значениях относительного разброса по энергиям  $\varepsilon$  и скоростям  $v$  связываются соотношением  $\Delta\varepsilon/\varepsilon \approx 2\Delta v/v$ . Также в работе [285] отмечается, что разброс порядка 10 % приводит к изменению фазового портрета динамической системы задачи, а именно к полному исчезновению области гистерезиса, что гарантирует отсутствие наблюдаемых колебаний тока коллектора.



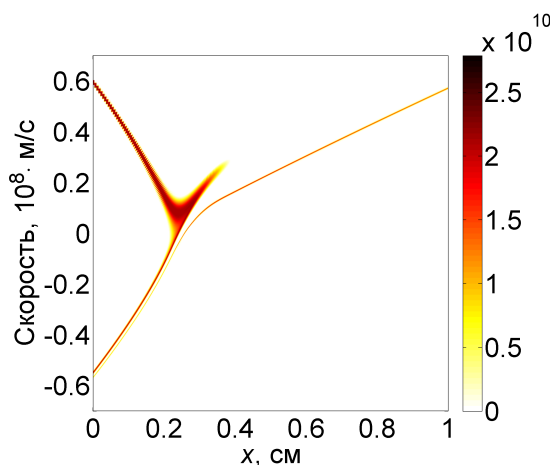


Рисунок 2.19 — Денситограмма функции распределения электронов в момент времени  $t = 5$  нс для случая инъекции квазимоноэнергетического пучка с относительным разбросом по скоростям  $\delta = 3\%$ .

На рисунке 2.19 приведён график плотности функции распределения электронов, полученный непосредственным решением уравнений (2.90) с граничным условием (2.94) на катоде (эмиттере). Энергия инжектированного пучка в данном случае составляла  $qU_{in} = 10$  кэВ. При инъекции квазимоноэнергетического пучка гармоническая составляющая спектра вычисленного тока коллектора соответствует частоте  $\sim 3.5$  ГГц, что подтверждается большинством теоретических оценок, приводимых в литературе, например, в [283].

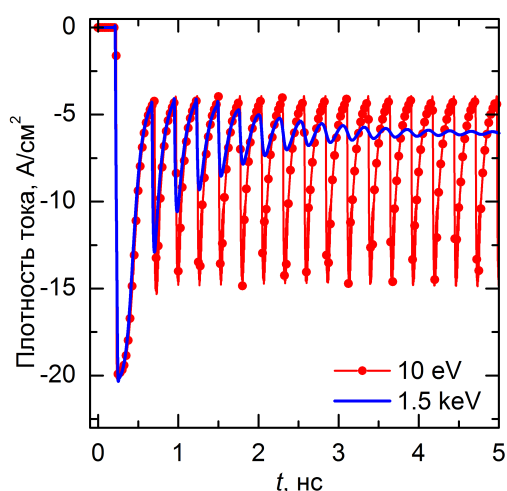


Рисунок 2.20 — Временные профили зависимостей плотности тока коллектора для случаев моноэнергетического и немонаэнергетического инжектируемых пучков в рамках метода решения кинетического уравнения.

Возникающим незатухающим колебаниям тока коллектора отвечают соответствующие колебания потоков электронов в обеих частях вакуумного эквипотенциального

промежутка, разделённого областью виртуального катода. Сама область виртуального катода также не является неподвижной, а представляет собой потенциальный барьер, положение которого меняется во времени по периодическому закону. Поскольку колебательное состояние данной системы с виртуальным катодом неустойчиво, то при увеличении разброса инжектируемых частиц по энергиям до значений свыше 15 % ( $\delta = 0.075$ ) от инжектируемой энергии, осцилляции должны полностью прекратиться. Как можно видеть на рисунке 2.20, данная тенденция полностью воспроизводится кинетическими расчётами. В них увеличение энергетического разброса до 15 % приводит к быстрому затуханию колебаний при отсчёте от момента времени начала их генерации. По мере расширения теплового разброса колебания тока полностью прекращаются. Дальнейшее увеличение разброса приводит к росту средне-квадратичного значения плотности тока коллектора из-за повышения вклада электронов в токоперенос в направлении коллектора. Физически, данные изменения происходят благодаря трансформации неустойчивого осцилляторного состояния в квазистационарный двухпоточковый режим токопротекания, функция распределения которого изображена на рисунке 2.21. Большее значение энергетического разброса приводит к стабилизации положения и повышению проницаемости виртуального катода для потока электронов, движущихся в направлении коллектора (анода). С увеличением “немоноэнергетичности” инжектируемого пучка всё большее количество электронов получают возможность достигать коллектора, чем и объясняется увеличение стационарного значения плотности тока.

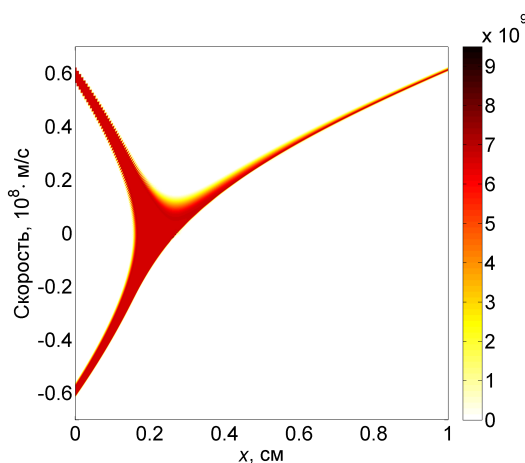


Рисунок 2.21 — Денситограмма функции распределения электронов для случая инжекции немонаэнергетичного пучка электронов с относительным разбросом по скоростям  $\delta = 15\%$  (режим квазистационарного токопротекания).

Результаты полученные путём непосредственного численного решения системы Власова-Пуассона подтверждаются данными экспериментов, например, приведёнными в работе [288], а также моделированием методом макрочастиц [68, 106].

## 2.4 Выводы

- Методика восстановления энергетических спектров убегающих электронов по данным кривых ослабления в фольгах различной толщины, основанная на регуляризации решения некорректной обратной задачи методом Тихонова-Арсенина, показала высокую эффективность для получения спектров пучков убегающих электронов. Впервые, в работах [86, 113, 114] она была применена для получения высоко достоверных интегральных функций распределения быстрых электронов по энергиям за анодом из фольги в вакуумных и газовых разрядах наносекундных длительностей. В отличие от применяемого ранее способа подбора решений обратной задачи (1.11), подкрепляемых рядом искусственных априорных предположений о характере спектра (например, [149, 155]), предложенный автором диссертационной работы метод регуляризации не требует для своей работы никакой дополнительной информации, кроме собственно данных кривой ослабления;
- В результате использования процедуры восстановления было установлено, что широкий спектр пучка убегающих электронов, генерируемый наносекундным газовым разрядом высокого давления, представлен несколькими группами, характеризующимися определёнными значениями средней энергии. Сравнение этих значений энергии с максимальным напряжением на диоде показало наличие небольшой группы электронов с “аномальными” энергиями, среднее значение которых превышает максимум напряжения (умноженный на значение элементарного заряда). В отличие от выводов, сделанных в работах [32, 147], было показано, что доля таких электронов не превышает  $\sim 10\%$  от общего числа частиц за фольгой. Было также установлено, что уменьшение радиуса кривизны катода ведёт к уменьшению доли электронов с “аномальными” энергиями. Также интерес представляют результаты апробации метода восстановления спектров, выполненные при исследовании спектра пучка электронов вакуумного диода (трубки ИМАЗ-150Э). В спектре пучка достоверно обнаружена небольшая группа электронов, имеющих “аномальные” энергии, гипотеза о существовании которой высказывалась ранее [225];
- Предложенная методика позволила поставить точку в дискуссиях о релевантности тех или иных данных кривых ослабления, полученных экспериментальным путём и оттого содержащих ошибки измерения. В частности, серии измерений, которые имеют

значительные систематические или случайные погрешности, в результате регуляризации будут давать спектральные распределения с отрицательными значениями, что не соответствует общим представлениям о функции плотности (распределения) частиц. В полной мере все указанные достоинства разработанного метода продемонстрированы в обобщающей работе [98], которая содержит большое количество восстановленных спектров электронов на основании различных наборов данных кривых ослабления. Благодаря тому, что получение кривых ослабления представляет собой гораздо более простую экспериментальную задачу, нежели непосредственное использование время-пролётной или магнитной спектрометрии, предложенная методика и реализующий её разработанный программный код получили широкое применение в ряде экспериментальных работ по исследованию явления убегания электронов в разрядах широкого диапазона давлений и различного состава газовых смесей [289–296];

- В данной главе был систематически и подробно описан предложенный автором подход к численному решению детерминистических уравнений переноса для многокомпонентных сред заряженных частиц, которые находятся в сильных электрических полях, обуславливающих преимущественно конвективную динамику их движения. Указанная методика дискретизации основана на сведении решения системы дифференциальных уравнений в частных производных к интегрированию эквивалентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (метод линий). Для дискретизации дивергенций конвективных потоков было впервые предложено использовать группу методов переменного порядка точности WENO, которая ранее применялась только в задачах вычислительной гидро- и газодинамики. В качестве дополнительного инструмента аппроксимации конвективных и диффузионных слагаемых в уравнениях переноса применялся метод конечных разностей, а также, в ряде случаев, использовалась комбинация обоих методов;

- Наряду с верификацией используемых численных алгоритмов для решения стандартных тестовых задач вычислительной математики (таких как решение уравнения Бюргерса, проблемы Бакли-Левретта и пр.), апробация выполнялась также на примере решения исследовательской задачи о компьютерном моделировании процессов возбуждения СВЧ-колебаний в диоде Ганна. Система детерминистических уравнений локально-полевой модели, описывающих поведение активной полупроводниковой структуры диода Ганна в одном пространственном измерении, сводилась к нелинейному уравнению переноса для напряжённости электрического поля, что позволяло применить разработанную методику численного расчёта. В результате моделирования было показано, что фаза СВЧ-колебаний устанавливается моментом перехода полупроводниковой структуры диода Ганна с локально-неоднородным у катода профилем

легирования в режим отрицательного дифференциального сопротивления с образованием доменов сильного поля. Было показано, что структура исследуемого полупроводника обладает способностью стабилизации фазы колебаний, а начальная фаза колебаний жёстко привязана к моменту времени достижения порогового напряжения на диоде. Результирующая амплитуда колебаний тока уже в первом периоде достигает значений, близких к типичным для режима установившихся колебаний;

- Сформулирована общая методология численного решения одномерных систем уравнений Пуассона-Власова и Максвелла-Больцмана, которая также применима к решению изолированного уравнения Больцмана (или Власова) для конфигураций физической системы с уже известным пространственно-временным распределением электрического поля. Численные алгоритмы были протестированы для решения уравнений Власова-Пуассона применительно к двум задачам вакуумной электроники: задаче о релаксации объёмного заряда при установлении тока в диоде Чайлда-Ленгмюра и задаче об инжекции моноэнергетического пучка в плоский эквипотенциальный вакуумный зазор. Полученные результаты численного решения находятся в хорошем согласии с аналитическими оценками и некоторыми результатами моделирования методом “макрочастиц”.

## Глава 3

# Детерминистические модели объёмных газовых разрядов высокого давления

В обзорной Главе 1 показано, что для детерминистического описания динамики газовых разрядов в широком диапазоне давлений газов успешно применяются системы уравнений низших моментов функции распределения (гидродинамические или “жидкостные” уравнения [160, 184]). Они представляют собой обобщённые уравнения непрерывности (1.16), записанные для электронов, ионов и возбуждённых компонент газовой смеси. Система уравнений низших моментов функции распределения дополняется уравнениями для электромагнитного или электростатического поля (уравнениями Максвелла или уравнением Пуассона). В обзорной главе было показано, что уравнения непрерывности получаются путём интегрирования уравнения Больцмана (1.15) для заданного типа частиц (электронов, ионов или нейтральных частиц) по импульсам (или скоростям) в фазовом пространстве задачи. Гидродинамическое описание требует, чтобы характерные масштабы неоднородностей разряда значительно превосходили соответствующие длины свободных пробегов частиц, что заведомо реализуется при давлении свыше  $10 \text{ Тор}$ , охватывая и диапазон высоких (порядка атмосферного) давлений.

В данной главе приводятся одномерные теоретические модели газовых разрядов и результаты моделирования, полученные в рамках предложенных моделей. Они представляют интерес не только с позиций последовательного изучения различных стадий зарождения и развития стационарных и импульсных разрядов высокого давления. В данной диссертационной работе изучаемые модели являются фундаментом гибри-

ных кинетических теорий, позволяющих исследовать генерацию пучков убегающих электронов в разрядах высокого давления, отделяя кинетическое рассмотрение от гидродинамического.

### 3.1 Модели планарных газовых разрядов

В данном разделе рассматривается нестационарная модель газоразрядного промежутка в одномерной декартовой геометрии. Конфигурация задачи представляет собой газонаполненный диод, образованный пространством между двумя неограниченными плоскопараллельными электродами. Для диода такой пространственной конфигурации электрическое поле в отсутствие частиц (и при условии квазинейтральности) является однородным. Предложенная постановка задачи интересна прежде всего с позиции последовательного моделирования нестационарного газового разряда в относительно простой геометрии. Она также позволяет обобщить основные наблюдения, сделанные для стационарных газовых разрядов в рамках элементарных теоретических выкладок [131]. Основные теоретические положения данной модели, результаты расчётов и выводы по ним опубликованы в работах [92, 94]. Результаты моделирования импульсного разряда в одномерной пространственной конфигурации используются также в работе [97] для вычисления характеристик пучка убегающих электронов.

Будем считать, что газ в промежутке слабо ионизован, так что концентрация плазмы существенно меньше концентрации нейтральных атомов или молекул. Такое предположение справедливо для газовых разрядов средних и высоких давлений. Оно позволяет рассматривать динамику распределений только заряженных частиц, не обращая внимание на убыль и восстановление баланса нейтральных атомов или молекул. Для простоты рассматриваемого случая неэлектроотрицательного газа, например, аргона или азота, можно ограничиться только двумя видами частиц - электронами и однозарядными ионами, составляющими основную долю частиц плазмы разрядов. В таком случае дрейфово-диффузионные потоки (1.17) ионов и электронов представляются в виде

$$\Gamma_e = -\mu_e n_e E - D_e \frac{\partial n_e}{\partial x}, \quad \Gamma_i = \mu_i n_i E - D_i \frac{\partial n_i}{\partial x} \quad (3.1)$$

где  $n_e, n_i$  - концентрации электронов и ионов,  $\mu_e, \mu_i$  - подвижности электронов и ионов,  $D_e, D_i$  - коэффициенты диффузии электронов и ионов соответственно,  $E$  - напряжённость электрического поля,  $x$  - координата на оси абсцисс.

В одномерной формулировке уравнение непрерывности (1.16) для обеих компонент плазмы имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_e}{\partial x} &= -\beta n_e n_i + \alpha(|E|)\mu_e |E| n_e, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x} &= -\beta n_e n_i + \alpha(|E|)\mu_e |E| n_e,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где  $\beta$  - постоянный коэффициент трёхчастичной рекомбинации,  $\alpha$  - коэффициент ионизации Таунсенда, зависящий от модуля напряжённости электрического поля. Согласно [131], значение коэффициента рекомбинации было выбрано  $\beta \approx 7 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3/\text{с}$ , а коэффициент Таунсенда представлял собой следующую функциональную зависимость

$$\frac{\alpha}{p} = A \exp\left(-\frac{B}{E/p}\right),$$

где  $p$  - давление газа,  $A, B$  - постоянные, зависящие от рода газа и отношения  $E/p$ , значения которых определяются на основании данных эксперимента [131]. Экспоненциальная форма зависимости коэффициента Таунсенда от  $E/p$  является наиболее общей для большого количества чистых газов и газовых смесей. Её область применимости ограничена рабочим диапазоном значений  $E/p$ . При необходимости, данная модель позволяет использовать аппроксимаций частного вида [122], которые удовлетворяют более широким рабочим диапазонам  $E/p$ .

Для самосогласованного учёта влияния объёмного заряда электронов и ионов на электростатическое поле система уравнений (3.2) дополняется одномерным уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}(n_e - n_i), \quad E = -\frac{\partial \phi}{\partial x},\tag{3.3}$$

где  $\phi$  - электростатический потенциал,  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая проницаемость вакуума,  $q$  - абсолютная величина заряда электронов.

Математически корректные граничные условия для системы уравнений (3.2), (3.3) формулируются исходя из граничных значений потоков частиц обоих типов. Так, на катоде электронный поток определяется интенсивностью вторичной электронной эмиссии [131] (гамма-процессов), а ионный поток в точности равен полному дрейфовому потоку

$$\Gamma_e(0, t) = -\gamma \Gamma_i(0, t), \quad \Gamma_i(0, t) = \mu_i n_i(0, t) E(0, t),\tag{3.4}$$

где  $\gamma$  - постоянная вторичных процессов на катоде. В силу того что дрейфовый поток намного больше диффузионного, мы считаем, что на аноде электронный поток в



точности равен дрейфовому, а поток ионов равен нулю:

$$\Gamma_e(d, t) = -\mu_e n_e(d, t) E(d, t), \quad \Gamma_i(d, t) = 0, \quad (3.5)$$

где  $d$  - длина газоразрядного промежутка.

Граничные условия для уравнения Пуассона представляют собой обычные в электростатике условия Дирихле для потенциалов на катоде и аноде

$$\phi(0, t) = 0, \quad \phi(d, t) = U(t) - I(t)R, \quad (3.6)$$

где  $U(t)$  – импульс напряжения на источнике питания,  $R$  – балластное сопротивление,  $I(t)$  – ток разряда, вычисляемый по формуле Сато [297]:

$$I(t) = \frac{qS}{d} \int_0^d (\Gamma_i - \Gamma_e) dx,$$

где  $S$  - площадь поперечного сечения рассматриваемого газового диода.

Также корректная постановка задачи для уравнений непрерывности концентрации частиц (3.2) требует задания согласованных начальных условий. В данном случае, начальные условия определяют однородную концентрацию квазинейтральной плазмы в промежутке (предыонизацию промежутка). Её значение определяется естественным фоном ионизирующего излучения вблизи поверхности Земли. Существенную роль в создании такого ионизирующего воздействия играют газообразные радионуклиды, представляющие собой составляющие цепочек распада урана и тория. Наиболее важным радионуклидом является радон  $^{222}\text{Rn}$  [298]. Эффективная скорость образования электрон-ионных пар при нормальной концентрации радона составляет  $\simeq 10 \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ , что соответствует максимальному уровню концентрации плазмы порядка  $n_0 \simeq 10^3 - 10^4 \text{ см}^{-3}$  [299]. Данный однородный уровень концентрации квазинейтральной плазмы является минимально возможным, так что начальные условия вида

$$n_e = n_i = n_0, \quad (3.7)$$

целесообразно использовать во всех расчётах по моделированию разрядов, если начальная предыонизация не задаётся в виде неоднородного распределения, максимальное значение которого существенно выше (3.7).

Вклад иных естественных факторов ионизирующего излучения, например, космических лучей существенно меньше [300]. С физической точки зрения в данных расчётах

допустимо использовать гораздо более высокие уровни начальной концентрации квазинейтральной плазмы  $n_0 \sim 10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-3}$  как это сделано, например, в работе [301]. Это условие позволяет пропустить расчёт длительного начального этапа, на котором происходит генерация достаточного количества электронов для развития дальнейших основных стадий разряда. В одинаковой степени данное утверждение справедливо для моделирования разных форм разрядов в конфигурациях, где электрическое поле без частиц или в условиях начальной квазинейтральности можно считать однородным.

Несомненным достоинством данной одномерной модели является то, что общая процедура решения системы уравнений (3.2)-(3.3) с граничными условиями (3.5), (3.4), (3.6) является численно-аналитической, так как уравнение Пуассона с допускает следующее решение в квадратурах

$$E(x, t) = -\frac{U(t) - I(t)R}{d} - \frac{q}{d\varepsilon_0} \int_0^d \int_0^x (n_i(x', t) - n_e(x', t)) dx' dx + \frac{q}{\varepsilon_0} \int_0^x (n_i(x', t) - n_e(x', t)) dx'. \quad (3.8)$$

Основные результаты в работах [92, 94] получены путём численного решения двух уравнений (3.2) с мгновенным значением электрического поля, определяемым выражением (3.8). Решение системы двух нестационарных дифференциальных уравнений осуществлялось методом линий, в котором конвективные слагаемые аппроксимировались методом конечных объёмов WENO третьего порядка точности, а диффузионные слагаемые аппроксимировались конечными разностями второго порядка точности. В данных расчётах использовалась однородная сетка для разбиения счётной области. При проведении расчётов общее количество элементов сетки варьировалось от 200 до 2000 для верификации численной схемы. Временной шаг переменной величины определялся автоматически выбранным решателем системы уравнений метода линий (в данном случае методом Рунге-Кутты-Фельберга, ode45) исходя из параметров относительной и абсолютной точности, которые устанавливались равными  $10^{-3}$  и  $10^{-6}$ , соответственно.

Рассмотрение импульсных (наносекундных или субнаносекундных) разрядов в плоской пространственной геометрии в рамках детерминистического подхода имеет существенные отличия от изложенной выше математической модели. В разрядах, протекающих за характерные времена менее одной наносекунды, ионная плотность не претерпевает значительных изменений ввиду низкой подвижности. С другой стороны, для корректного расчёта детальной эволюции импульсных разрядов, полностью пре-

небрежь движением ионов нельзя, так как именно поток ионов на катоде порождает вторичные электроны за счёт гамма-процессов.

В работе [97], а также в Главе 12 монографии [80], приводятся основные отличия одномерной модели “быстрого” разряда от модели, изложенной выше. В разрядах, протекающих за доли наносекунды, необходимо учитывать изменение электромагнитного поля системы вместо самосогласованного вычисления электростатического поля (3.3). Для этого общий вид системы уравнений Максвелла в случае одного пространственного измерения и без внешнего магнитного поля сводится к уравнению сохранения полного тока (закону Ампера) и уравнению Пуассона

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + q(\Gamma_i - \Gamma_e) &= j(t), \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{q}{\varepsilon_0}(n_i - n_e),\end{aligned}\tag{3.9}$$

где  $j(t)$  - плотность тока, определяемая цепью подключения газового диода. Для электрической цепи, состоящей из импульсного источника напряжения с резистивным балластом  $R$ , данное выражение принимает вид

$$j(t) = \frac{U(t) - \int_0^d E(x, t) dx}{RS}.\tag{3.10}$$

Полная система уравнений модели будет включать (3.9) и первое уравнение непрерывности в (3.2) только для электронной компоненты плазмы, поскольку концентрация ионной компоненты в данной постановке выражается из уравнения Пуассона. Численное решение указанной системы из двух нестационарных дифференциальных уравнений также осуществлялось методом линий, в котором конвективные слагаемые в виде градиентов потоков (конечных объёмов) аппроксимировались методом WENO третьего порядка точности, а диффузионные слагаемые аппроксимировались конечными разностями второго порядка точности (2.35). Для отыскания концентрации ионов из уравнения Пуассона использовалась формула численного дифференцирования (2.23).

На начальном этапе для верификации предложенных моделей, а также для настройки параметров используемых численных схем в работе [92] было проведено моделирование распределения плотностей электронов и ионов при развитии тлеющего разряда в азоте при давлении 10 Торр, постоянном напряжении источника питания 961 В и балластном сопротивлении цепи 30 кОм. Длина промежутка устанавливалась равной  $d = 1$  см, а площадь поперечного сечения -  $S = 1$  см<sup>2</sup>. При данном значении межэлектродного зазора, приложенное напряжение незначительно превышает статическое пробивное

значение, определяемое законом Пашена (не более 10 %). Аналогичные численные расчёты также проводились для разрядов в широком диапазоне давлений от 1 до 760 Тор в работе [94]. Для расчётов использовалась модель, включающая уравнения непрерывности для электронов и ионов (3.2), и точное решение уравнения Пуассона (3.8). Параметры коэффициента Таунсенда, подвижностей и коэффициентов диффузии для газовой среды в расчётах соответствовали азоту [131] -  $A = 12 \text{ 1/(см Тор)}$ ,  $B = 342 \text{ В/(см Тор)}$ ,  $\mu_e p = 0.42 \cdot 10^6 \text{ см}^2 \text{Тор}/(\text{В с})$ ,  $\mu_i p = 2.3 \cdot 10^3 \text{ см}^2 \text{Тор}/(\text{В с})$ ,  $D_e p = 1.4 \cdot 10^6 \text{ см}^2 \text{Тор}/\text{с}$ ,  $D_i p = 45 \text{ см}^2 \text{Тор}/\text{с}$ , где  $p$  - рабочее давление газа (азота).

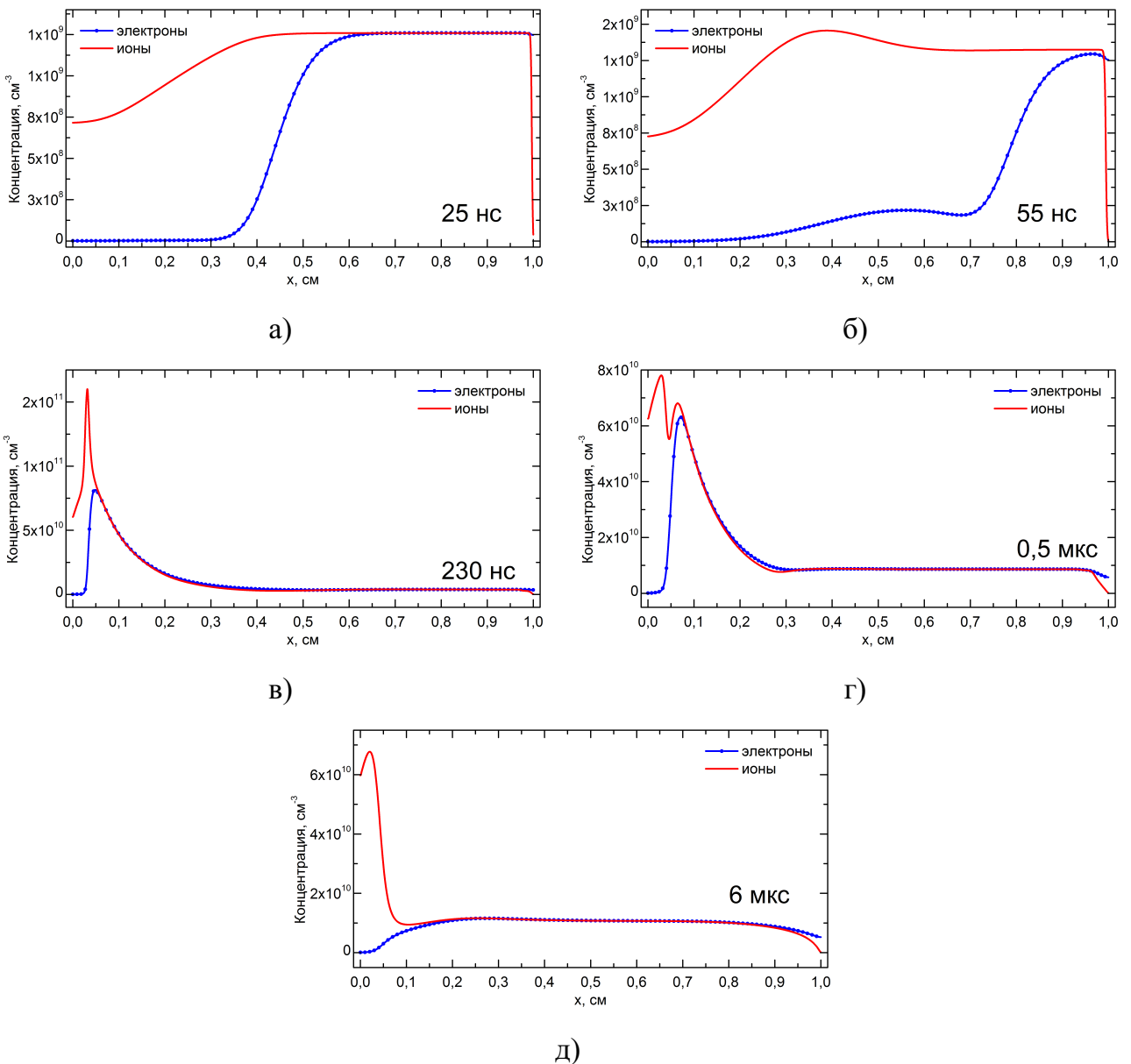


Рисунок 3.1 — Распределения плотности электронов и ионов в различных фазах развития тлеющего разряда в азоте при давлении 10 Тор.

Процесс формирования разряда состоит из следующих стадий, последовательно изображённых на рисунке 3.1: а) уход электронов на анод, при котором незначительно

увеличивается плотность тока; б) процесс ионизации в объёме газоразрядного промежутка, который характеризуется падением плотности тока; в) ионизация в катодной области, где наблюдается резкий рост плотности тока и скопление ионов у катода; г) спад концентраций заряженных частиц и формирование стационарной структуры тлеющего разряда, который выделяется некоторым спадом плотности тока и длительным временем релаксации к стационарному состоянию.

Зависимости тока разряда и падения напряжения на газоразрядном промежутке от времени приведены на рисунке 3.2. Они демонстрируют особенности коммутационной зависимости на стадии формирования и стремление системы к стационарному состоянию горения разряда постоянного тока.

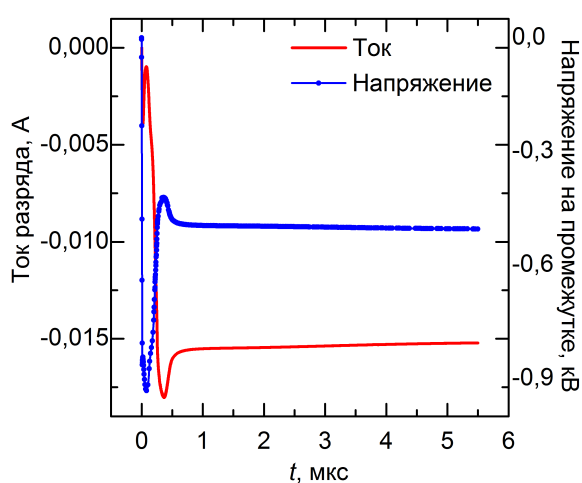


Рисунок 3.2 — Временные зависимости тока разряда и падения напряжения на промежутке в модели тлеющего разряда.

Моделирование нестационарного процесса формирования структуры разряда в целом хорошо согласуется с теоретическими расчётами и экспериментальными измерениями, положенными в основу описания данного явления в монографии [131]. В процессе моделирования формирования структуры тлеющего разряда были выявлены некоторые особенности катодного слоя в переходной области. Одна из них показана на рисунке 3.1 г). На нём видно, что распределение концентраций ионов в некоторый момент времени имеет два максимума, один из которых в дальнейшем спадает и переходит в положительный столб разряда. Данная особенность формирования разряда не фигурирует в упрощённых теоретических построениях [131], т.к. является следствием корректного численного решения гидродинамических уравнений непрерывности совместно с уравнением Пуассона. Полученная картина стационарного распределения плазмы разряда хорошо согласуется с результатами исследований, сделанных в рамках стационарных моделей [82–85].

Импульсный разряд в газе повышенного давления в одномерной декартовой геометрии впервые изучался в рамках предложенной модели в работе [97]. Электрическая цепь задачи представляла собой импульсный источник напряжения, подключенный к газовому диоду через балластное сопротивление, равное 30 Ом. Диод представлял собой газонаполненный зазор  $d = 0.5$  см между двумя плоско-параллельными электродами, имеющими площади поперечного сечения  $S = 1$  см<sup>2</sup>. Через балластное сопротивление на зазор подавался трапециевидный импульс напряжения длительностью 1 нс с амплитудой на полной высоте равной 172 кВ, что примерно в десять раз превышает статическое пробивное напряжение для азота. Передний и задний фронты импульса имели длительности не более 0.2 нс.

Для расчёта возникновения и развития импульсного разряда в азоте использовалась математическая модель, учитывающая согласованное вычисление электрического поля по уравнениям Максвелла (3.9) совместно с уравнением непрерывности для электронной концентрации (3.2). В качестве начальных условий задавалось квазинейтральное распределение электрон-ионной плазмы на уровне  $n_0 \sim 10^5$  см<sup>-3</sup> и нулевое распределение электрического поля. Трапециевидный импульс напряжения задавался сглаженной функцией вместе со значениями первой и второй своих производных.

В отличие от предыдущего расчёта, в данном случае для улучшения сходимости использовалась квазиравномерная сетка (2.17) с параметрами  $\xi_* = 0.6, L \equiv d, a = d/10, b = d/2$ . Дополнительно в целях улучшения пространственно-временной сходимости метода, общее количество элементов сетки варьировалось от 500 до 2000. Временной шаг переменной величины также определялся решателем системы метода линий (процедурой Рунге-Кутты-Фельберга) на основании параметров относительной и абсолютной точности, которые устанавливались равными  $10^{-4}$  и  $10^{-6}$ , соответственно.

На рисунке 3.3 изображены временные зависимости напряжения на импульсном источнике питания, а также зависимости падения напряжения на диоде и тока в цепи. В данных условиях при значительном перенапряжении промежутка по отношению к значению статического пробивного напряжения в азоте, пробой межэлектродного промежутка происходит на переднем фронте питающего импульса напряжения. Как отмечалось в [122], характерное время пробоя составляет доли наносекунды. После этого (см. рисунок 3.3) разряд переходит в стадию коммутации, в результате чего напряжение на промежутке падает до значений, определяемых условиями протекания тока в цепи за счёт наличия в ней балластного сопротивления.

До начала стадии коммутации ( $t \leq 140$  пс) ионизация газа в диоде по своей структуре квазиоднородна, за исключением узкой прикатодной области, имеющей характерные

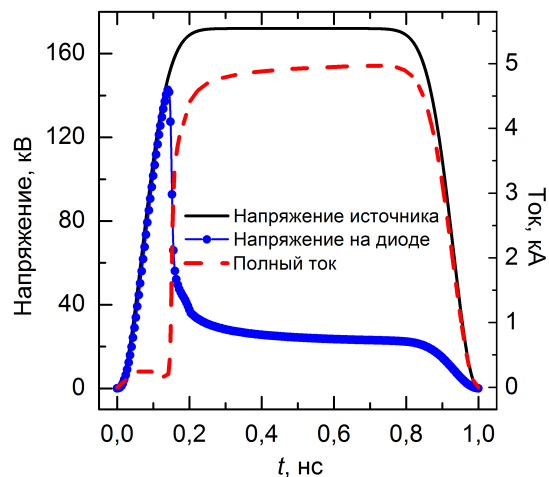


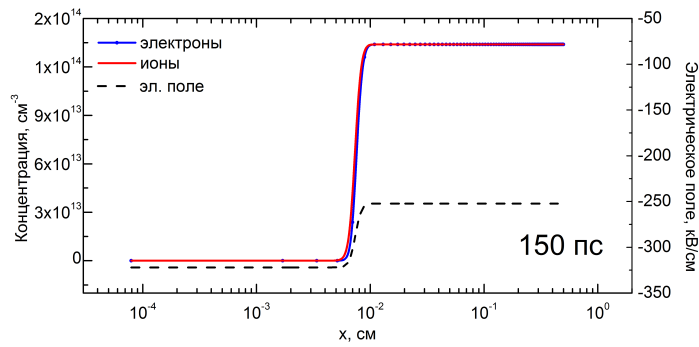
Рисунок 3.3 — Коммутационные характеристики в модели импульсного газового разряда субнаносекундной длительности.

размеры не более 80 мкм к концу этого периода времени. Электрическое поле в прикатодной области лишь незначительно превышает однородное значение, в то время как падение напряжения на промежутке достигает максимального значения 143 кВ. Дальнейшее развитие разряда приводит к коммутации промежутка, резкому уменьшению значения падения напряжения на диоде, и, соответственно, к росту тока в цепи. На рисунке 3.4 изображены пространственные распределения концентрации плазмы разряда (электронов и ионов), а также распределения электрического поля в моменты времени, последующие коммутации промежутка.

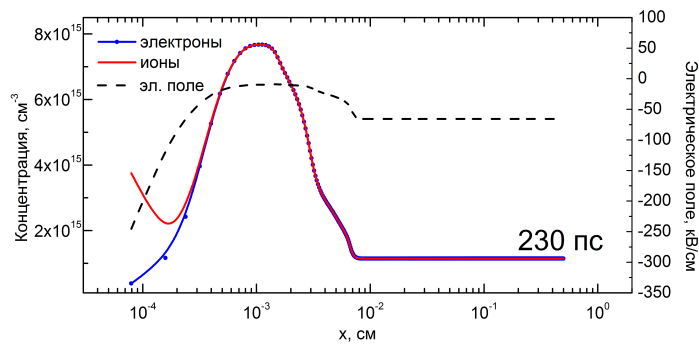
Исходя из данных, приведённых на рисунке 3.4 а), в момент времени  $t \leq 150$  пс межэлектродное пространство разделяется на две области: прикатодную, в которой происходит усиление электрического поля, и область квазинейтральной плазмы. В прикатодной области значение электрического поля достигает максимума. Оно превышает значение в столбе квазинейтральной плазмы на 30 %, однако ионизационное размножение происходит преимущественно в столбе плазмы поскольку концентрация электронов в прикатодной области низка.

На следующей стадии процесса  $150 < t \leq 230$  пс (рисунок 3.4 б) происходит формирование промежуточной структуры разряда. Здесь следует отметить, что у катода и у анода располагаются обширные области, в которых происходит активное ионизационное размножение. Эти две области разделены слоем, где ионизация полностью отсутствует. В отличие от моментов времени  $t \leq 150$  пс, на данном этапе генерация ионов в прикатодной области идёт существенно интенсивнее, чем в столбе плазмы.

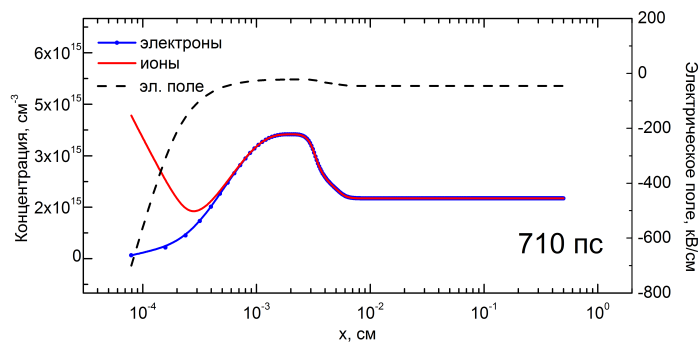
В моменты времени соответствующие окончанию импульса напряжения, например  $230 < t \leq 710$  пс на рисунке 3.4 в), происходит окончательное формирование хорошо



а)



б)



в)

Рисунок 3.4 — Пространственные распределения концентрации ионов и электронов плазмы импульсного разряда в азоте, а также электрического поля для различных моментов времени.

известной структуры стационарного разряда, сходной по строению с классическим распределением параметров в тлеющем разряде [131]. На данном этапе ионизация происходит исключительно в прикатодной области, где электрическое поле принимает максимальные значения. Подобная картина является типичной для стационарной формы разряда, описываемой упрощёнными теориями [131].



## 3.2 Модели одномерно-осесимметричных газовых разрядов

подавляющее большинство экспериментальных конфигураций газовых диодов представляют собой газоразрядные промежутки, образованные электродами с резко неоднородной геометрией [80]. Чаще всего они имеют вид двумерно-осесимметричных или трёхмерных пространственных конфигураций. При подаче постоянного или импульсного напряжения на газоразрядные промежутки такой формы даже в отсутствие частиц между электродами возникает сильно неоднородное электрическое поле, которое обусловлено тем, что один из электродов имеет малый радиус кривизны. В зависимости от степени перенапряжения промежутка, в газовой среде это приводит к быстрому возникновению областей интенсивного ионизационного размножения, обусловленного тем, что локальные значения электрического поля превышают статические пробивные величины. В отличие от моделей плоских одномерных газовых диодов, представленных в предыдущем разделе, при самопроизвольном инициировании разряда в диодах с неоднородной геометрией, начальное ионизационное размножение, как правило, возникает на поверхности катода. Зачастую сильное электрическое поле способствует формированию неоднородного профиля начальной ионизации, что приводит к протеканию многоканальной формы разряда [122].

Теоретическое моделирование данных форм разряда в моделях, основанных на уравнениях для низших моментов функции распределения электронов с дрейфово-диффузионным приближением сопряжено со значительными трудностями, вносимыми размерностью задачи. С другой стороны, планарные одномерные модели (раздел 3.1) не позволяют рассматривать физическую ситуацию с неоднородной конфигурацией электрического поля, обусловленной только геометрией газоразрядного промежутка. Исходя из чего в ряде работ, в том числе и посвящённых исследованию быстрых разрядов высокого давления, генерирующих убегающие электроны - [59, 61, 64, 102–105, 107, 110, 111], автором диссертационной работы было принято решение смоделировать одномерно-осесимметричный газоразрядный промежуток.

Моделируемая пространственная конфигурация представляет собой газовый диод, состоящий из двух бесконечно-протяжённых коаксиальных цилиндров: внутреннего (катода) с радиусом  $r_c$  и внешнего (анода) с радиусом  $r_a > r_c$ . Если приложенное напряжение между катодом и анодом не равно нулю, то электростатическое поле в промежутке существенно неоднородно и спадает с ростом значения координаты как  $\sim 1/r$ . Его распределение  $E(r, t)$  ( $r$  - радиальная координата) определяется точным

решением одномерного уравнения Пуассона в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_e - n_i), \quad E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (3.11)$$

которое имеет в квадратурах следующий вид:

$$\begin{aligned} E_r(r, t) = & -\frac{U(t) - I(t)R}{r \log(r_a/r_c)} - \\ & -\frac{q}{r \log(r_a/r_c)\varepsilon_0} \int_{r_c}^{r_a} \frac{1}{r''} \int_{r_1}^{r''} r' (n_e(r', t) - n_i(r', t)) dr' dr'' + \\ & + \frac{q}{r\varepsilon_0} \int_{r_c}^r r' (n_e(r', t) - n_i(r', t)) dr', \end{aligned} \quad (3.12)$$

где использованы следующие параметры цепи:  $U(t)$  – импульс напряжения на источнике питания,  $R$  – балластное сопротивление,  $I(t)$  – ток разряда, – введённые в выражение (3.12) аналогично тому как они были обозначены для одномерной модели (3.3).

Отличие данной постановки задачи от случая планарной конфигурации, рассмотренной в разделе 3.1, состоит в том, что осесимметричная модель позволяет варьировать одновременно как величину межэлектродного зазора  $d \equiv r_a - r_c$ , так и фактор неоднородности промежутка, определяемый тем, насколько электрическое поле на катоде превосходит поле у анода. Последнее обстоятельство делает возможным использование одномерной осесимметричной модели для приближённого анализа процессов, возникающих в многомерных конфигурациях. Для этого достаточно решить электростатическую задачу для многомерного случая, определив фактор усиления поля, а затем, путём вариации  $r_c$  и  $r_a$ , воссоздать в одномерной модели сходные физические условия, не требуя при этом “визуального” сходства конфигураций одномерного и многомерного разрядных промежутков.

Начиная с работы [59], в модель было введено ещё одно важное упрощение, превращающее её в т.н. “минимальную” модель разряда. Данное понятие широко распространено в литературе, посвящённой детерминистическому моделированию стримеров в слабых полях [302, 303] и может быть также использовано применительно к рассмотрению более обширной группы разрядных явлений. В “минимальной” модели пренебрегают переносом ионов, учитывая только процессы их рождения и гибели. Для этого в уравнении непрерывности для ионов соответствующий дрейфово-диффузионный поток приближенно полагают равным нулю  $\Gamma_i \approx 0$ . Такое приближение оправдано, если характерные времена развития разрядов не превышают характерные времена релаксации

ионов  $\sim 10$  мкс. Исходя из характерных времён протекания наносекундных газовых разрядов, в данной диссертационной работе такое приближение вполне допустимо.

Итак, в наиболее общем виде система дифференциальных уравнений “минимальной” модели имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \vec{\Gamma}_e = \alpha |\vec{v}_e| n_e, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} = \alpha |\vec{v}_e| n_e, \\ \nabla^2 \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_e - n_i), \end{cases} \quad (3.13)$$

где  $\vec{\Gamma}_e$  - поток электронов в дрейфово-диффузионном приближении, определяемый выражением (1.17).

Так как уравнение непрерывности ионов в (3.13) не содержит пространственных производных, его точное решение может быть выражено в квадратурах

$$n_i(\vec{r}, t) = n_0(\vec{r}) + \int_0^t \alpha (|\vec{E}(\vec{r}, t')|) |\vec{v}_e(\vec{r}, t')| n_e(\vec{r}, t') dt', \quad (3.14)$$

где  $n_0(\vec{r})$  - заданное начальное распределение квазинейтральной плазмы. Отметим, что решение типа (3.14) будет справедливо для всех ионных компонент, рассматриваемых с учётом конкретной плазмохимии разряда. Например, для расчёта быстрых разрядов в электроотрицательном газе система уравнений минимальной модели будет включать ещё одно уравнение для ионов:

$$\begin{cases} \frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \vec{\Gamma}_e = (\alpha - \eta) |\vec{v}_e| n_e, \\ \frac{\partial n_p}{\partial t} = \alpha |\vec{v}_e| n_e, \\ \frac{\partial n_n}{\partial t} = \eta |\vec{v}_e| n_e, \\ \nabla^2 \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_e - n_p + n_n), \end{cases} \quad (3.15)$$

где  $n_p$  и  $n_n$  - концентрации положительно и отрицательно заряженных ионов, соответственно,  $\eta$  - коэффициент прилипания, зависящий от модуля напряжённости электрического поля.

Моделирование быстрых разрядов в одномерной осесимметричной пространственной геометрии в рамках минимальной модели с электростатическим полем представляет собой численное решение уравнения непрерывности для электронов (2.13), в котором поле  $E_r(r, t)$  задано квадратурной формулой (3.12), а концентрация положительно заряженной ионной компоненты  $n_i(r, t)$  вычисляется с использованием формального решения (3.14). Дискретизация уравнения непрерывности для концентрации электро-

нов подробно описана в разделе 2.2. Она осуществляется путём последовательного применения метода линий совместно с методом конечных разностей, с помощью которого аппроксимируется дивергенция дрейфово-диффузионного потока. В результате получается следующая система уравнений метода линий - (2.24). Дискретизация одномерной осесимметричной задачи осуществляется с использованием квазиравномерных сеток - (2.15) и (2.16), которые позволяют детализовать левую приграничную область расчётного интервала по радиальной переменной (прикатодную область).

Как и в разделе 3.1, более точные расчёты нестационарных характеристик быстропротекающих разрядов должны осуществляться с учётом самосогласованного изменения электромагнитного поля системы заряженных частиц в суперпозиции с внешним полем, которое определяется условиями внешней электрической цепи. В этом случае система уравнений Максвелла в цилиндрических координатах также сводится к системе двух уравнений - закона Ампера и уравнения Пуассона, которые с учётом внешней цепи с источником напряжения и балластным сопротивлением запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} - q\Gamma_e &= \frac{J(t)}{2\pi r}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} &= \frac{q}{\varepsilon_0}(n_i - n_e), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $J(t)$  - электрический ток в цепи, определяемый из правил Кирхгофа выражением

$$J(t) = \frac{1}{LR} \left[ U(t) - \int_{r_c}^{r_a} E_r(r, t) dr \right], \quad (3.17)$$

где  $L$  - длина коаксиального газового диода,  $R$  - балластное сопротивление в цепи.

Начальные условия задачи отличаются от начальных условий для планарного одномерного газового диода, приведённых в разделе 3.1. В простейшем случае начальные условия представляют собой аналогичные однородные распределения концентрации квазинейтральной плазмы и нулевое значение электрического поля в диоде (3.7). Однако в ряде важных задач, рассматриваемых в данной диссертационной работе, проводится обобщение однородных начальных условий для концентрации плазмы и на случай неоднородного распределения  $n_e(r, 0) = n_0(r)$ . Следует отметить, что ярко выраженная нестационарность и неоднородность протекания разряда создаёт серьёзные предпосылки для возникновения различных сценариев формирования всех стадий разряда. Начальный уровень и профиль распределения предыонизации промежутка является трудно контролируемым экспериментальным фактором, поэтому наиболее целесообразно

но исследовать теоретически зависимость протекания разряда от флуктуации начальных условий.

Граничные условия для уравнения непрерывности электронной концентрации также отличны от условий (3.4) и (3.5), накладываемых в одномерной планарной геометрии. Благодаря быстрому росту напряжения на диоде и неоднородной пространственной конфигурации промежутка, у катода будет происходить значительное усиление электрического поля, что, в свою очередь, приведёт к возникновению сгустка плазмы высокой концентрации за счёт явления локальной ударной ионизации. Помимо этого, существуют и другие физические механизмы, благодаря которым происходит резкое увеличение электронной концентрации вблизи поверхности катода. Наиболее вероятным источником дополнительного количества электронов у катода в газовых разрядах со значительным перенапряжением является автоэлектронная эмиссия. Исходя из закона Фаулера-Нордгейма [304], при увеличении электрического поля плотность тока автоэлектронной эмиссии очень быстро возрастает. Тем не менее, во всех предложенных автором моделях введением каких-либо дополнительных источников появления электронов у катода пренебрегается. Для того чтобы упростить моделирование и опустить детальное описание механизма эмиссии с катода, на левой границе рассматриваемой области применяется нулевое условие Неймана

$$\frac{\partial n_e(0, t)}{\partial r} = 0.$$

Для верификации предложенной модели формирования быстрого (наносекундного) разряда в осесимметричном случае в работе [96] впервые был смоделирован такой разряд в среде азота атмосферного давления. В качестве начального уровня предыонизации была выбрана минимально допустимая концентрация квазинейтральной плазмы  $n_0 = 10^3 \text{ см}^{-3}$ , состоящей из электронов и положительных ионов. Коаксиальный газовый диод подключался непосредственно к источнику импульсного напряжения  $U(t) = U_0 \sin^2(\pi t/T)$ , где  $U_0 = 250 \text{ кВ}$ ,  $T = 2 \text{ нс}$ . На рисунке 3.5 представлены профили распределения плазмы разряда и электростатического поля, взятые в отдельные моменты времени для диода с параметрами  $r_c = 0.2 \text{ см}$ ,  $r_a = 4 \text{ см}$ .

Благодаря резкому нарастанию напряжения на промежутке, в начальные моменты времени поле у катода быстро вырастает до значений, многократно превышающих статический порог пробоя в азоте. Усиление поля вблизи катода приводит к резкому ионизационному размножению и повышению концентрации плазмы до значений  $\sim 10^{14} - 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , что выражается в формировании головки волны ионизации, имеющей резко очерченные контуры за счёт значительного перепада концентрации плазмы.

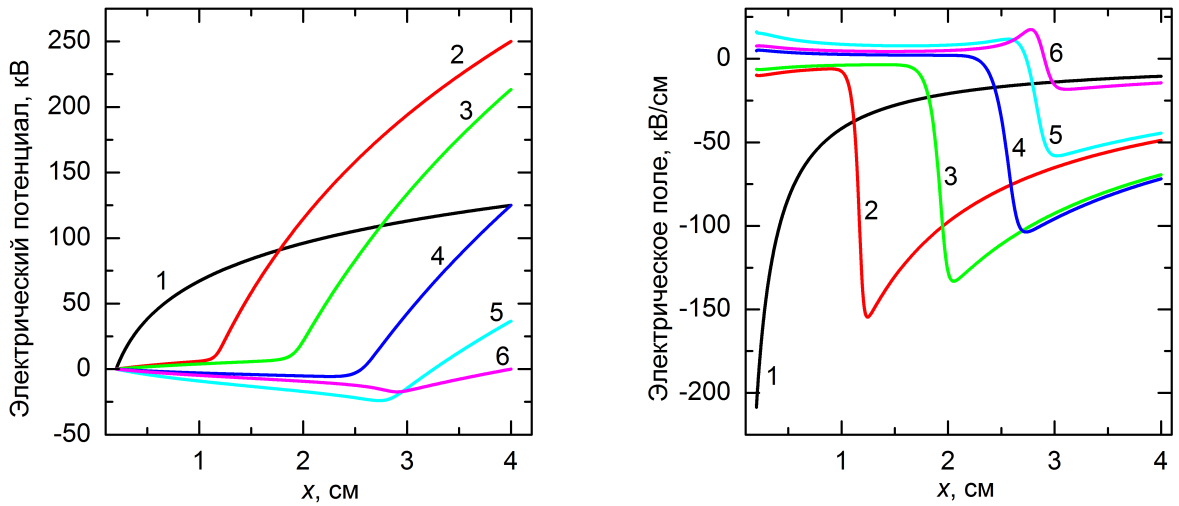
В работе [96] величина скачка концентрации оценивается по формуле

$$\Delta n \sim \frac{\varepsilon_0 E_{max}^2}{2q E_{max}/\alpha} = \frac{\varepsilon_0}{2q} A p E_{max} \exp\left(-\frac{B}{E_{max}/p}\right),$$

которая даёт реалистичные оценки порядка  $\Delta n \simeq 1.5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , сопоставимые с результатами моделирования ( $E_{max}$  - локальный максимум напряжённости электрического поля на фронте волны ионизации).

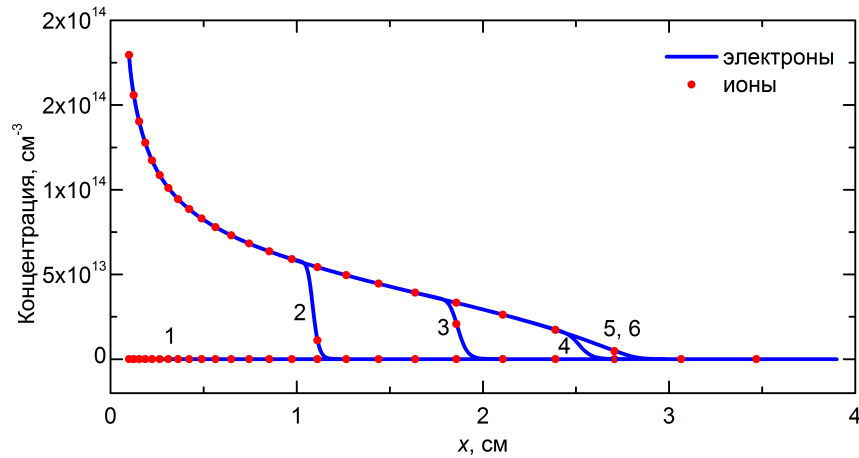
За короткие времена порядка сотен пикосекунд промежуток разделяется на часть, занятую телом волны ионизации (область высокой концентрации плазмы) и часть, имеющую низкий уровень предыонизации, который соответствует начальному уровню. Дальнейшее увеличение напряжения на промежутке способствует росту протяжённости высоко-ионизованного региона в направлении от катода к аноду. Данная физическая ситуация отвечает т.н. критерию Лозанского-Фирсова [305], при выполнении которого в предыонизованном канале разряда происходит локальный предельный переход от условия квазинейтральности  $\Delta\phi = 0$  к равенству нулю электростатического потенциала  $\phi = 0$ . В ряде литературных источников данное явление называется *электрической экранировкой*, например, в [303]. В работе [306] даётся ряд теоретических оценок характерной длины экранирования, которая примерно равна длине тела волны ионизации.

Фронт волны ионизации представляет собой разновидность гидродинамического фронта ударной волны, который движется со скоростью порядка локального значения дрейфовой скорости электронов, определяемой в свою очередь локальным значением напряжённости поля. Динамика распределения электрического поля представляет собой нестационарное решение вида “бегущая волна”. В силу пространственной неоднородности задачи амплитуда бегущей волны уменьшается по мере приближения головки плазменного канала к аноду. Если волна ионизации за короткий импульс не успевает пережечь зазор (пример приведён на рисунке 3.5), то выравнивания электрического поля и потенциала не происходит. Некоторая неоднородность электрического поля и потенциала сохраняется после выключения напряжения. В дальнейшем она нивелируется относительно медленными процессами амбиполярной диффузии и рекомбинации. Из рисунка 3.5 видно, что скорость волны ионизации пропорциональна её протяжённости (или длине экранирования). Данное наблюдение хорошо согласуется с теоретическими результатами работы [305]. Также сопоставление распределений электрического поля и концентрации плазмы для одинаковых моментов времени (рисунок 3.5) убедительно показывает, что квазинейтральность плазмы значительно нарушается только фронте волны ионизации, где происходит основной процесс генерации плазмы, собственно и поддерживающей движение волны ионизации. В этом заключается основное отличие



а)

б)



в)

Рисунок 3.5 — Пространственные распределения: а) электростатического потенциала, б) напряжённости электрического поля, и в) профилей концентраций ионов и электронов. Распределения приводятся для моментов времени: 1 - 0.5 нс, 2 - 1.0 нс, 3 - 1.25 нс, 4 - 1.5 нс, 5 - 1.75 нс, 6 - 2.0 нс.

анатомии разряда в осесимметричной конфигурации диода от планарного разряда. В последнем объёмная ионизация в разные моменты времени преобладает в различных областях промежутка (см. раздел 3.1).

Другим важным примером одномерно-осесимметричной задачи о разряде наносекундной длительности является моделирование разряда высокого давления в среде электроотрицательного газа. В рамках тематики данной диссертационной работы наибольший интерес представляет гексафторид серы ( $SF_6$  или элегаз) как газ, имеющий порог статического пробивного напряжения в три раза превышающий пробивное напряжение в воздухе (89 кВ/см) [307]. В работах [102–104] для моделирования наносекундного разряда в элегазе использовалась система уравнений непрерывности в виде

“минимальной” модели (3.15). Уравнение Пуассона в системе (3.15) было заменено на (3.16) для более точного учёта быстро изменяющегося электромагнитного поля. Таким образом, полная система уравнений, описывающая динамику плазмы быстрого разряда в электроотрицательном газе имела вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_e}{\partial t} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ \mu_e E_r n_e + D_e \frac{\partial n_e}{\partial r} \right] \right) = (\alpha - \eta) \mu_e |E_r| n_e \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} - q \left[ \mu_e E_r n_e + D_e \frac{\partial n_e}{\partial r} \right] = \frac{U(t) - \int_{r_c}^{r_a} E_r(r, t) dr}{2\pi r L R} \\ n_p = n_0 + \int_0^t \alpha(|E_r|) \mu_e |E_r| n_e dt \\ n_n = n_p - n_e - \frac{\varepsilon_0}{qr} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Для более точного расчёта динамики газового разряда в элегазе были использованы экспериментальные зависимости для скорости дрейфа электронов, а также коэффициентов Таунсенда, прилипания и диффузии, применимые в широком диапазоне величин напряжённости электрического поля [308] (в единицах СИ)

$$\alpha/N = \begin{cases} 3.4473 \cdot 10^{34} (E/N)^{2.985}, & E/N \leq 4.6 \cdot 10^{-19} \text{ В} \cdot \text{м}^2 \\ 11.269 (E/N)^{1.159}, & E/N > 4.6 \cdot 10^{-19} \text{ В} \cdot \text{м}^2 \end{cases}$$

$$\eta/N = \begin{cases} 2.0463 \cdot 10^{-20} - 0.25379 (E/N) + \\ + 1.4705 \cdot 10^{18} (E/N)^2 - 3.0078 \cdot 10^{36} (E/N)^3, \\ E/N \leq 2.0 \cdot 10^{-19} \text{ В} \cdot \text{м}^2 \\ 7.0 \cdot 10^{-21} \exp(-2.25 \cdot 10^{18} (E/N)), \\ E/N > 2.0 \cdot 10^{-19} \text{ В} \cdot \text{м}^2 \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\mu_e E/N = 1.027 \cdot 10^{19} (E/N)^{0.7414}, \quad 10^{-20} \leq E/N \leq 2.0 \cdot 10^{-18} \text{ В} \cdot \text{м}^2,$$

$$D/\mu_e = 8.6488 \cdot 10^9 (E/N)^{0.5}, \quad E/N \leq 6.5 \cdot 10^{-19} \text{ В} \cdot \text{м}^2,$$

где  $E$  - абсолютное значение электрического поля,  $N$  - число Ломшмидта.

На рисунках 3.6-3.7 представлены типичные результаты моделирования газового разряда в элегазе атмосферного давления. Амплитудное значение напряжения на импульсном источнике было равно 200 кВ при длительности примерно 1 нс по основанию импульса (кривая 1, рисунок 3.6). Для моделирования нагрузки внутреннего сопротивления источника питания, которое обычно является коаксиальной формирующей



линией [122], параметр балластного сопротивления устанавливался равным  $R = 75$  Ом. Коаксиальный газовый диод имел следующие параметры:  $r_c = 1$  мм,  $r_a = 10$  мм и  $L = 1$  см. Начальные и граничные условия для расчёта, представленного на рисунках 3.6-3.7, не отличались от таковых для вышеописанного случая расчёта разряда в азоте.

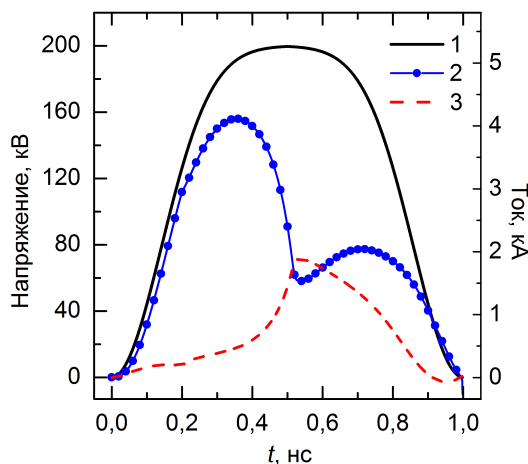


Рисунок 3.6 — Зависимости напряжения на источнике - 1, падения напряжения на промежутке - 2 и полного тока в цепи - 3 в модели импульсного газового разряда в элегазе.

Временные зависимости падения напряжения и полного тока в цепи (кривые 2 и 3 на рисунке 3.6) коаксиального диода, заполненного элегазом, наглядно демонстрируют качественные отличия динамики развития разряда в электроотрицательном газе от разряда в азоте, например, изображённые на рисунке 3.3. Максимальное амплитудное значение падения напряжения на газоразрядном промежутке составляет 160 кВ, что значительно превышает статическое пробивное значение. Пробой газа также развивается на переднем фронте импульса напряжения, но фаза коммутация промежутка наступает значительно позже и характеризуется относительно более высоким падением напряжения на диоде. Данное обстоятельство объясняется тем, в среде электроотрицательного газа процессы прилипания электронов к нейтральным молекулам существенно ограничивают проводимость плазмы из-за образования отрицательно заряженных ионов, имеющих низкое (по сравнению с электронной) значение подвижности. С течением времени проводимость плазмы на разных стадиях протекания разряда становится преимущественно ионной, а не электронной как это имеет место в благородных и неэлектроотрицательных газах.

Более подробно различные стадии развития разрядного явления в элегазе можно проанализировать исходя из мгновенных распределений концентрации плазмы (рисунок 3.7). В данном случае для электроотрицательного газа формирование структуры разряда,

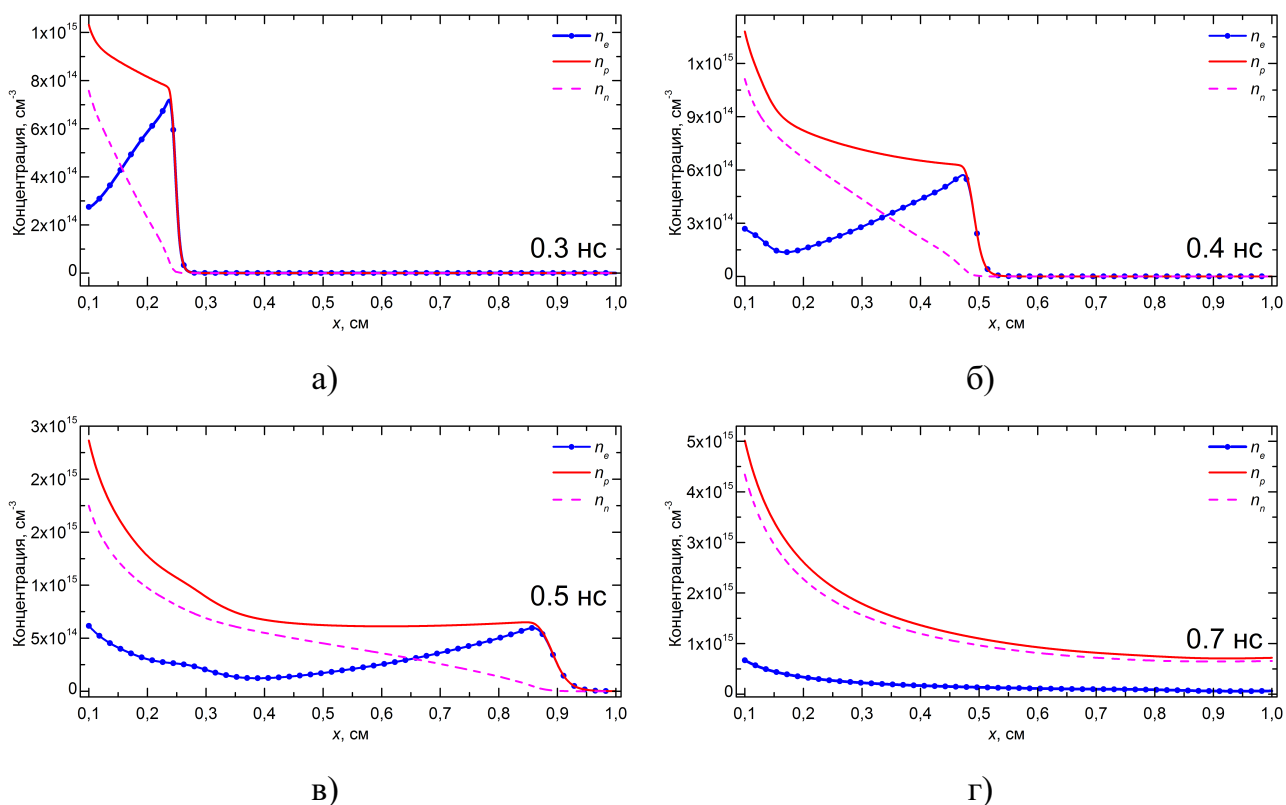


Рисунок 3.7 — Профили концентрации электронов, положительных и отрицательных ионов в различных фазах развития импульсного разряда в элегазе.

начиная с первых долей наносекунды, также представляет собой зарождение волны ионизации, имеющей структуру отрицательного стримера, который стартует с катода. За короткий промежуток времени (порядка сотни пикосекунд) начальный однородный фон начальной ионизации трансформируется в пространственно-неоднородное образование плотной плазмы у катода за счёт интенсивной генерации плазмы вблизи геометрической неоднородности. По мере роста концентрации плазмы и приближению к условию критерия Лозанского-Фирсова начинается рост тела волны ионизации в направлении анода. Данный рост характеризуется линейным увеличением скорости головки волны ионизации в зависимости от длины канала. Аналогично разряду в азоте, рассмотренному ранее, перераспределения ионизованных слоёв в промежутке не происходит, что отличает рассматриваемое явление от разрядов в планарной геометрии.

Как отмечалось ранее, на протяжении всего импульсного разряда плазма в промежутке в значительной мере является ион-ионной, т.е. образованной положительными и отрицательными ионами. Последние генерируются за счёт интенсивных процессов прилипания электронов к нейтральным молекулам элегаза. Перемыкание газоразрядного промежутка каналом плотной плазмы происходит в момент достижения анода волной ионизации. Процесс коммутации промежутка в элегазе происходит значительно позже

(при 0.7 нс), чем в неэлектроотрицательных газах при прочих одинаковых условиях, что также объясняется относительно низкой проводимостью ион-ионной плазмы. При коммутации промежутка (полном переключении его волной ионизации на рисунке 3.7 г) также сохраняется преимущественно ион-ионный состав плазмы.

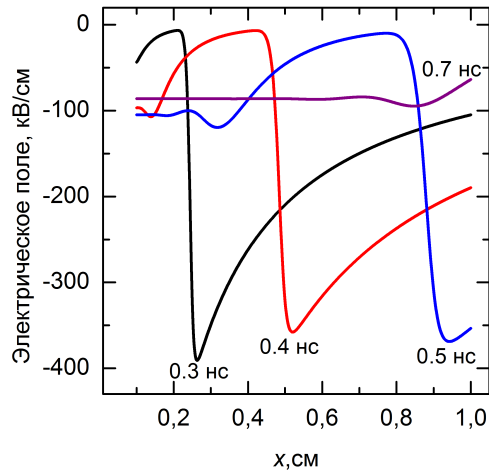


Рисунок 3.8 — Пространственное распределение напряжённости электрического поля импульсного разряда в различные моменты времени.

На рисунке 3.8 изображены профили распределения электрического поля в моменты времени, соответствующие пространственным распределениям плазмы разряда на рисунках 3.7. Характер изменения электрического поля представляет собой распространение фронта бегущей волны переменной амплитуды от катода к аноду, которое происходит синхронно с движением волны ионизации. При достижении волной ионизации поверхности анода, электрическое поле выравнивается (0.6 нс).

Во всех моделях, рассматриваемых в данной главе не используется искусственный приём, облегчающий инициирование разряда на ранних стадиях, который применяется в подавляющем большинстве работ по макроскопическому моделированию стримеров и других высоковольтных разрядов. Начиная с работ [168, 309, 310] такой подход широко распространён и по сей день [311–314]. Данное упрощение заключается в задании высокого значения ( $\sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ) концентрации квазинейтральной плазмы, локализованной вблизи поверхности катода. Чаще всего начальное распределение имеет вид “гауссового пятна”, задаваемого в наиболее общем виде следующей формулой:

$$n(\vec{x}, t = 0) = n^* \exp \left[ -\frac{(\vec{x} - \vec{x}_0)^2}{\sigma^2} \right], \quad (3.20)$$

где  $n^*$  - максимальное значение концентрации в пятне,  $\vec{x}_0$  и  $\sigma$  - параметры распределения. Очевидно, что параметры распределения выбираются произвольным образом

для того, чтобы избежать расходимости численных схем, которые возникают на начальной стадии зарождения волны ионизации у катода. Трудности при численном расчёте возникают из-за того, что однородное начальное распределение за короткое время преобразуется к сильно неоднородному, локализованному вблизи катода. При использовании несовершенных численных схем дальнейший рост напряжения на промежутке приводит не к росту волны ионизации (или стримера), а ведет к повышению концентрации плазмы до нефизически высоких значений и к обрыву вычислений из-за расходимостей, поэтому задание 3.20 помогает пропустить эту критическую начальную стадию расчёта. С другой стороны, это приводит к искажению как общей картины разряда, так и характерных времён стадий токопротекания в промежутке, что становится заметным, если рассматриваются быстрые разряды длительностью несколько наносекунд, поскольку в них характерные времена формирования первых убегающих электронов совпадают с началом роста волны ионизации.

Данную проблему пытались решать путём введения дополнительных процессов, например, ударного отлипания электронов от ионов в электротрицательных газах [315], а также путём задания аномально высоких значений тока эмиссии Фаулера-Нордгейма с поверхности катода. Однако в большинстве работ не воспроизводился основной механизм формирования начальной стадии разряда, который основан на усилении поля вблизи геометрически неоднородного катода и дальнейшем повышении концентрации плазмы до значений, близких к параметрам критерия Лозанского-Фирсова.

### 3.3 Выводы

- На базе дифференциальных уравнений для нулевых моментов функции распределения заряженных частиц (уравнений непрерывности для концентраций) были сформулированы нестационарные одномерные теоретические модели, описывающие формирование и развитие газовых разрядов высокого давления в атомарных и молекулярных газах. Уравнения переноса дополнялись уравнением Пуассона или системой уравнений Максвелла для согласованного учёта изменения электромагнитного поля. Особое внимание уделялось разработке аспектов моделей, которые непосредственно касались расчётов характеристик быстрых наносекундных разрядов в промежутках со значительным перенапряжением по отношению к статическому пробивному значению. Данные модели успешно применяются для описания динамики основных компонентов плазмы газового разряда высокого давления. Они также являются базовыми составляющими гибридного подхода к моделированию разрядов с убегающими электронами, принципы построения которого изложены в следующей главе диссертации;

- В рамках предложенных одномерной планарной и одномерно-осесимметричной моделей, были выполнены численные расчёты всех стадий развития наносекундных газовых разрядов высокого давления в средах азота и элегаза. На основании изученной динамики распределений концентраций компонент плазмы и электрического поля было показано значительное различие в анатомии разрядов, протекающих в этих двух пространственных конфигурациях. В планарном разряде между двумя плоско-параллельными электродами в различные моменты времени наблюдается чередование порядка слоёв с различным уровнем ионизации. В осесимметричном случае подобного чередования не происходит. Динамика разряда в нём представляет собой зарождение и распространение области высоко-ионизованной плазмы от катода к аноду. Движение этой области представляет собой волну ионизации, аналогичную по структуре и некоторым характеристикам отрицательным стримерам, развивающимся в слабых электрических полях.

## Глава 4

# Гибридное моделирование быстрых разрядов с убегающими электронами

### 4.1 Основные теоретические положения гибридного моделирования

Проблема моделирования газового разряда высокого давления, генерирующего потока убегающих электронов, представляет собой яркий пример задачи, имеющей фундаментальное значение. Как было показано в обзорной главе, имитационное моделирование (метод макрочастиц) и многогрупповой метод не позволяют полностью корректно описывать такие процессы в плотных газах. Возможностями их наиболее реалистичного описания обладают методы физической кинетики, включающие решение кинетического уравнения в нестационарной пространственно-неоднородной постановке.

Решение кинетического уравнения Больцмана представляет собой многомерную интегро-дифференциальную задачу математической физики, поэтому ввиду сложности уравнения возможности получения его аналитических решений существенно ограничены. Вычислительные проблемы полностью кинетического описания всей плазмы разряда, состоящей из электронов и ионов одного типа, известны достаточно хорошо и описаны в литературе [316]. Они заключаются в существенном различии пространственно-временных масштабов движения ионов и электронов, что выражается в необходимости совместного численного решения двух кинетических уравнений. Поэтому, следуя теоретическим построениям моделей, например, бесстолкновительных

ударных волн в разреженной плазме, можно оставить решение кинетического уравнения только для частиц, чье теоретическое изучение должно быть предельно точным. Остальные типы частиц в таком случае можно описывать с помощью упрощенных, например, макроскопических моделей. На первый взгляд может показаться, что подобное сочетание методов действительно упрощает общую процедуру численного решения. Однако даже такое кинетическое описание трудно реализуемо на практике, например, для случае ограниченной двумерной пространственной конфигурации разрядного явления, из-за рекордных требований к вычислительной мощности и объемам используемой оперативной памяти ЭВМ.

В данной главе диссертационной работы излагается гибридный подход к описанию явлений генерации убегающих электронов в разрядах атмосферного давления, предложенный автором в 2015 году в работе [97]. Такой подход основан на использовании приближения, которое является следствием одного важного экспериментального наблюдения. Ещё в [122] отмечалось, что хотя эффект убегания электронов иногда привлекается для объяснения ускоренного продвижения анодонаправленного стримера при умеренных перенапряжениях, представляется всё же, что для пробоя по стримерному механизму указанный эффект не является определяющим. Позже данный факт нашёл экспериментальное подтверждение в большом количестве работ [80], в том числе и в ряде работ автора диссертации, посвящённых восстановлению спектрального состава убегающих электронов по данным поглощения в фольгах различной толщины (Глава 2). Эксперимент показал, что данное утверждение в одинаковой степени справедливо как для стримерного механизма пробоя в слабых полях, так и для распространения волны ионизации при сильных перенапряжениях.

Если основываться на экспериментальных данных, то убегающие электроны в разрядах высокого давления генерируются в условиях быстрого изменения пространственно-временной структуры разряда, на формирование которой сам поток быстрых электронов влияния практически не оказывает. Доля убегающих электронов в таких разрядах слишком мала, для того, чтобы существенно изменять токопротекание в промежутке, которое обеспечивается ионами и медленными (плазменными) электронами. Исходя из этого, предлагаемый гибридный подход основывается на том, что разрядное явление описывается макроскопическими (гидродинамическими) уравнениями (Глава 3), а кинетическое уравнение Больцмана используется только для описания поведения электронов, способных переходить в режим непрерывного ускорения. Общие положения гибридного моделирования можно сформулировать в виде следующих теоретических утверждений:

- Влиянием потоков убегающих электронов на динамику процессов газового разряда можно пренебречь, поскольку количество быстрых электронов пренебрежимо мало по сравнению с общим количеством электронов в разрядной плазме;
- Плазменные (вторичные) электроны, способные переходить в режим убегания, генерируются с максвелловским распределением в момент рождения;
- Вторичные электроны набирают направленную скорость в результате ускорения в нестационарном электрическом поле, создаваемом эволюцией плазмы разряда;
- Убегающие электроны гибнут вследствие единичных упругих столкновений с атомами или молекулами газа, описываемых транспортным сечением рассеяния.

Исходя из сформулированных выше теоретических положений, методология гибридного подхода разделяется на два этапа. На первом этапе решаются макроскопические нестационарные уравнения для разрядной плазмы, т.е. для медленных частиц. Поскольку убегающие разряды мало влияют на динамику разряда, то макроскопическое моделирование проводится отдельно от решения кинетического уравнения. В результате решения гидродинамических уравнений мы получаем профили распределения концентраций ионов  $n_i(\vec{x}, t)$  и электронов  $n_e(\vec{x}, t)$ , а также электрического поля  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  в произвольный момент времени.

Второй этап представляет собой моделирование явления генерации убегающих электронов с использованием физической кинетики. Для чего предполагается, что все электроны, рождённые в разряде (вторичные) обладают потенциальной возможностью перейти в режим убегания или стать “кандидатами в убегающие”. Их рождение и то электрическое поле, в котором они двигаются, определяются динамикой “медленных” частиц, составляющих плазму разряда. Основу математической модели данного этапа представляет нерелятивистское или релятивистское кинетическое уравнение Больцмана для указанной группы электронов, в котором распределение электрического поля  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  берётся из самосогласованного решения уравнений макроскопической модели. Поведение всех кандидатов в убегающие электроны регламентируется модельным интегралом столкновения, содержащим наряду с источниками также и члены, описывающие гибель убегающих электронов. Рождение и гибель электронов определяются сечениями рассеяния, задающими те или иные столкновения в форме оператора Крука (2.80). Если электрон по каким-либо причинам перестаёт быть убегающим, то он не пополняет общую численность медленных плазменных электронов, опять же, в силу малочисленности своей группы.

Заметим, что в предложенной гибридной модели нет деления всех электронов на группы по какому-либо признаку, например, по средней энергии, как это делается, например, в многогрупповом подходе. Генерируемые электроны разряда приобретают



такую функцию распределения, которая определяется условиями токопротекания и столкновительной частью кинетического уравнения. Также кинетический подход не использует понятия о “критическом” поле убегания, потому что рассматривается не отдельная частица, взаимодействующая с веществом, а весь ансамбль заряженных частиц, имеющий непрерывную функцию распределения. В результате последовательного решения уравнений модели мы получаем детальное описание динамики макроскопических параметров разряда, согласованное с функцией распределения быстрых электронов, полученной из первых принципов - на основании решения уравнения Больцмана.

## 4.2 Планарный газовый диод

Выше, в разделе 3.1 главы 3 приводится описание модели быстрого (наносекундного) разряда в планарном газовом диоде, заполненном азотом атмосферного давления. В настоящем разделе представлены результаты расчётов характеристик пучка убегающих электронов в планарном диоде, которые опубликованы в работе [97]. Данная конфигурация представляет собой сугубо теоретический интерес, потому что реальные газоразрядные промежутки, как правило, имеют геометрические неоднородности, приводящие к локальному усилению электрического поля. Однако, с позиции гибридного моделирования, планарный диод интересен тем, что данная модель является промежуточным звеном между нуль-мерной моделью генерации убегающих электронов [100], в которой электрическое поле и распределение частиц считаются однородными, и моделями, в которых электрическое поле априори не однородно даже в отсутствие частиц. На рисунке 3.4 показано, что движение заряженных частиц в промежутке приводит к тому, что электрическое поле в процессе протекания нестационарного тока в диоде становится сильно неоднородным. Область наибольшей неоднородности не локализуется вблизи катода, а меняет своё положение на протяжении всей длительности импульса напряжения. Это приводит к специфической трансформации нестационарной функции распределения убегающих электронов на аноде, а также к появлению тока убегающих электронов, временной профиль которого имеет несколько пиков.

Поскольку задача первого этапа моделирования решена в предыдущей главе, то для изучения динамики убегающих электронов из решения гидродинамических уравнений мы взяли распределение электрического поля  $E(x, t)$  и распределение концентрации электронов  $n_e(x, t)$ , вычисленные в дискретные моменты времени, соответствующие схеме численного решения уравнения Больцмана, записанного в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{qE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = G(x, v, t) - V(x, v, t), \quad (4.1)$$

где  $f \equiv f(x, v, t)$  - функция распределения электронов,  $G(x, v, t)$  - слагаемое интеграла столкновений, отвечающее за генерацию электронов, а  $V(x, v, t)$  - слагаемое, описывающее гибель электронов.

В соответствии с основными теоретическими положениями гибридного подхода рождение частиц будет описываться правой (источниковой) частью уравнения непрерывности (3.2), умноженной на максвелловский форм-фактор

$$\begin{aligned} G(x, v, t) &= \left( \frac{\partial n_e}{\partial t} \right) \cdot \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \exp(-\xi v^2) = \\ &= \alpha(|E|)\mu_e|E|n_e \sqrt{\frac{\xi}{\pi}} \exp(-\xi v^2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\xi$  - числовой коэффициент функции распределения Максвелла, который выбирается исходя из теплового разброса энергий вторичных электронов  $\sim 1 - 5$  эВ.

Гибель быстрых электронов описывается отталкиваясь следующего предположения: если за характерные времена набора скорости электроном в продольном электрическом поле не произошло ни одного столкновения, то такой электрон является “истинно убегающим” в данной модели. Отсюда следует форма записи для слагаемого, описывающего убыль быстрых электронов, в виде частоты столкновений

$$V(x, v, t) = \nu(v)f(x, v, t), \quad (4.3)$$

где частота столкновений даётся выражением

$$\nu(v) = N\sigma^*(v)v = \frac{N\sigma_{\max}v}{1 + \eta v^4}, \quad (4.4)$$

в котором  $\sigma^*(v)$  - транспортное сечение рассеяния электронов,  $\sigma_{\max}$  - низкоэнергетический предел транспортного сечения рассеяния,  $N$  - число Лошмидта,  $\eta$  - параметр сечения, который подбирается таким образом, чтобы транспортное сечение соответствовало высокоэнергетической асимптотике (формуле Бете-Блоха) в требуемом диапазоне скоростей [317].

Кинетическое уравнение для описание динамики убегающих электронов (4.1) решалось с помощью численной схемы (2.87)-(2.88). Для контроля точности учёт столкновений (посредством оператора  $\mathfrak{M}_2[Z]$ ) производился как с использованием явной эйлеровой схемы, так и с помощью точного решения уравнения столкновений (2.69)

$$\frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} = G(x, v, t) - \nu(v)f(x, v, t), \quad (4.5)$$

которое имеет следующий вид

$$f(x, v, t^{n+1}) = e^{-\nu(v)t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} G(x, v, t') e^{\nu(v)t'} dt' + f(x, v, t^n) e^{-\nu(v)(t^{n+1}-t^n)}, \quad (4.6)$$

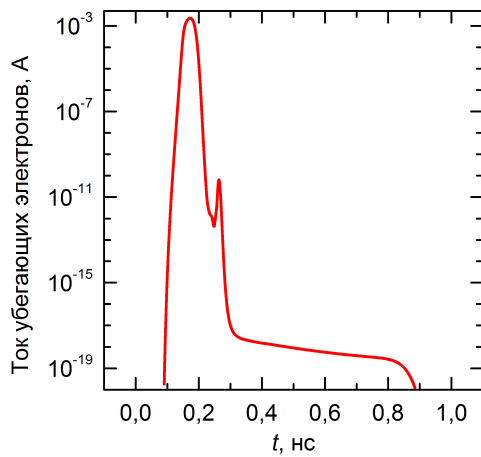
где  $t^n$  и  $t^{n+1}$  - моменты времени, соответствующие соседним дискретным моментам времени.

Детали численной схемы решения уравнений непрерывности совместно с уравнениями Максвелла подробно обсуждались в Главе 2, поэтому уточним здесь некоторые параметры процедуры решения уравнения Больцмана. Электрическое поле  $E(x, t)$  и скорость ионизации  $\partial n_e(x, t)/\partial t$ , вычисленные с заданной относительной временной точностью  $\sim 10^{-3}$  на квазиравномерной пространственной сетке, насчитывающей до 2000 точек разбиения, сохранялись с шагом 0.1 пс на всём временном интервале задачи, равном полной длительности импульса напряжения источника по основанию - 1 нс.

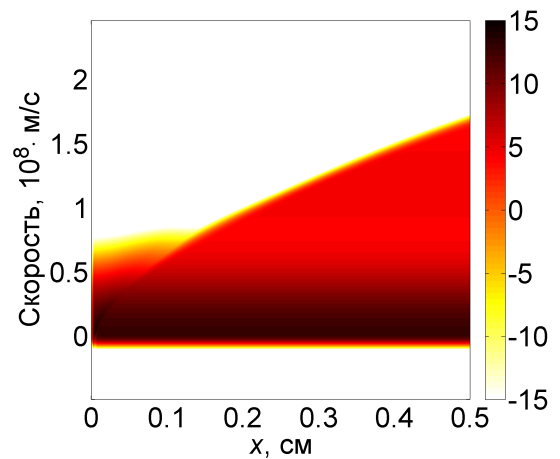
Перед началом численного решения уравнения Больцмана сохранённые массивы  $E(x, t)$  и  $\partial n_e(x, t)/\partial t$  загружались в оперативную память и интерполировались по пространственной координате  $x$  до 2500 узлов сетки, поскольку для уравнения Больцмана предполагалось использовать равномерное разбиение фазового пространства  $2500 \times 3500$  точек. Так как поток убегающих электронов направлен от катода к аноду, то расчётный интервал скоростей выбирался несимметричным относительно нулевого значения скорости, так что большая часть точек разбиения соответствовала положительному значению продольной скорости для обеспечения большей детализации решения.

Важным аспектом всех расчётов функции распределения убегающих электронов на аноде, а также вычисления тока убегающих электронов, является моделирование ослабления пучка при прохождении через фольгу определённой толщины. В экспериментальных работах по изучению спектрального состава пучка и генерируемого рентгеновского излучения (см. Главу 2) анодные фольги использовались в качестве фильтра для основной части электронного потока, т.е. медленных (плазменных) электронов. Изменение функции распределения при прохождении фольги определяется формулой (1.11). Функция распределения умножается на коэффициент ослабления  $\tau(\varepsilon(v), d_i)$  в алюминии (1.12) (формула Табата-Ито [153]). В данных расчётах моделируется алюминиевая фольга толщиной  $d_i = 10$  мкм, соответственно ток убегающих электронов за фольгой даётся выражением

$$J_{RE}(t) = qS \int_0^{v_{\max}} v f(x = d, v, t) \tau(\varepsilon(v), d_i) dv. \quad (4.7)$$



а)



б)

Рисунок 4.1 — Ток убегающих электронов за анодом из фольги толщиной 10 мкм а) и фазовый портрет решения уравнения Больцмана б), соответствующий моменту времени с максимальным значением тока убегающих электронов.

На рисунке 4.1 в логарифмическом масштабе представлен импульс тока убегающих электронов за фольгой (а) и денситограмма функции распределения (б), построенная в момент времени, соответствующий максимуму плотности тока (а). Профиль тока имеет основной максимум и дополнительный пик, о существовании которого известно из ряда экспериментальных работ [30, 318, 319]. Существование дополнительных максимумов на осциллограммах тока пучка наиболее часто регистрировалось в экспериментах с трубчатым катодом при межэлектродных зазорах меньше и больше “оптимального”, т.е. соответствующего максимальной амплитуде тока. Часто двухпиковая форма импульса тока регистрировалась за толстыми фольгами, что свидетельствовало о высокоэнергетичном характере данного явления. Однако генерация двух и более пиков объяснялась либо пикосекундными задержками между формированием у катода и движением отдельных диффузных струй [320], либо её существование ставилось под сомнение, поскольку данные измерения выполнялись на пределе используемой осциллографической техники. Одномерная модель убедительно показывает, что второй пик является следствием запаздывающих убегающих электронов, сгенерированных в момент времени, когда полный ток разряда максимален. Напряжение на диоде в этот момент времени (рисунок 3.3) имеет значение порядка 30 кВ, которое соответствует пролётному времени 100 пс, что отвечает запаздыванию второго пика тока убегающих электронов.

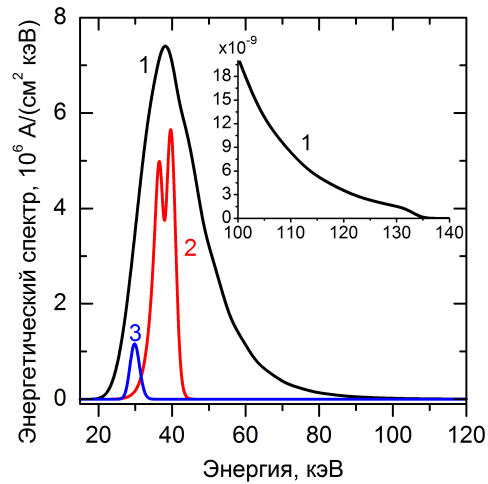


Рисунок 4.2 — Функция распределения убегающих электронов за фольгой 10 мкм в различные моменты времени: 1 - 148 пс, 2 - 236 пс (функция домножена на  $10^7$ ), 3 - 710 пс (функция домножена на  $10^{13}$ ). Малый график - детализация высокоэнергетического “хвоста” функции распределения 1. Графики соответствуют значениям мгновенных напряжений на промежутке - 123, 32 и 23 кВ, соответственно.

Для изучения динамики убегающих электронов наибольшую ценность в гибридной теоретической модели представляют собой мгновенные распределения электронов на аноде. Данные значения вычисляются как произведение нестационарной функции распределения на аноде  $x = d$  на коэффициент ослабления, т.е.  $f(d, v, t) \cdot \tau(v, d_i)$ . На рисунке 4.2 представлены спектры убегающих электронов, взятые в отдельные моменты времени, которые приведены к одному масштабу для лучшей наглядности. В момент времени 0.15 нс (кривая 1) максимум распределения находится в точке, соответствующей отметке 39 кэВ, а сама функция распределения имеет протяжённый высокоэнергетический “хвост”, простирающийся до значения 135 кэВ (см. малый график на рисунке 4.2). Данная форма спектра обусловлена тем, что область генерации вторичных электронов в указанный момент времени полностью расположена внутри столба плазмы, о чём можно судить по графикам распределений концентрации и электрического поля, полученных из макроскопической модели (рисунок 3.4).

Хотя в последующие моменты времени - 236 пс и 710 пс - убегающие электроны практически полностью отсутствуют, гибридная модель позволяет вычислить спектр и его временную трансформацию (рисунок 4.2). В момент времени 236 пс спектр имеет двухпиковую структуру, которая объясняется тем, что разряд имеет две области генерации вторичных электронов: прикатодную и область столба плазмы, где электрическое поле отлично от нуля (рисунок 3.4). Второй максимум соответствует тем убегающим электронам, которые генерируются в прикатодной области. По мере эволюции разряда первый пик уменьшается и исчезает из-за того, что источником генерации вторичных

электронов становится прикатодная область. Поскольку напряжение на диоде падает, то амплитуда оставшегося пика также уменьшается, а его положение смещается в область низких энергий. Уменьшение амплитуды объясняется как ростом сечения столкновений при низких энергиях, так и значительным ослаблением низкоэнергетичной составляющей электронного пучка в фольге.

Предложенная гибридная кинетическая модель впервые непротиворечивым образом показывает явление генерации убегающих электронов с энергиями, превосходящими мгновенное значение  $qU(t)$ . В более широком смысле данное понятие в литературе принято обозначать термином “аномальные” значения энергии [80]. Основное происхождение “аномальных” мгновенных распределений связано с конечным временем пробега электронов в случае данной простейшей геометрической конфигурации промежутка. Падение напряжения на промежутке непрерывно уменьшается (см. рисунок 3.3), а некоторая “аномальность” энергий сохраняется вплоть до последнего рассматриваемого момента времени. Если же говорить об “аномальной” составляющей интегрального спектрального распределения убегающих электронов, то в плоской геометрии она отсутствует. Так максимальное падение напряжения на промежутке примерно равно 130 кВ (см. рисунок 4.2), и при этих значениях функция распределения электронов близка к нулю (см. малый вставной график на рисунке 4.2).

### 4.3 Коаксиальный газовый диод

Достоинствами рассматриваемой выше одномерной плоской гибридной модели является возможность определения места зарождения вторичных электронов, переходящих в режим убегания в газе высокого давления, а также возможность вычисления мгновенных и интегральных (за полное время рассмотрения) функций распределения убегающих электронов. Однако планарная модель газоразрядного промежутка далека от реальных двух- и трёхмерных геометрических конфигураций газовых диодов, в которых катод, чаще всего, представляет собой геометрически-неоднородный электрод с малым радиусом кривизны, а анод выполнен в виде металлической сетки или пластины из фольги. Использование подобного типа конфигурации разрядного промежутка экспериментально обосновано тем, что регистрируемые значения тока убегающих электронов тем выше, чем выше фактор неоднородности промежутка при неизменных значениях межэлектродного зазора и напряжении источника [80].

Теоретическое моделирование двумерных и трёхмерных разрядных конфигураций с использованием принципов физической кинетики сопряжено со значительными вычислительными трудностями, которые возникают при решении кинетического уравнения.

Например, в декартовых координатах двумерный случай потребует сотен гигабайт оперативной памяти, поскольку для хранения массива данных двумерной функции распределения на каждом шаге решателя потребуется использовать четырёхмерный массив переменных одинарной или двойной точности. При построении теоретических моделей разрядов с убегаящими электронами, автором данной диссертационной работы, не ставится цель воспроизвести экспериментальную конфигурацию газового диода в деталях. Напротив, основными принципами построения предложенных моделей является их простота и универсальность, которые сочетаются с разумным описанием необходимых физических процессов, присущих физическим явлениям в многомерных конфигурациях.

Действительно, для моделирования физических процессов, приводящих к возникновению потоков убегаящих электронов в газах высокого давления в реальных разрядных конфигурациях, достаточно ввести в модель неоднородность электрического поля, которая возникает в промежутке, заполненном квазинейтральной плазмой. Этого нетрудно добиться, если рассматривать теоретическую модель одномерного коаксиального газового диода как логическое развитие предложенной выше гибридной модели планарного одномерного диода. Макроскопическое рассмотрение разрядного процесса в осесимметричной конфигурации дано ранее, в разделе 3.2 главы 3. Достоинствами указанной модели является возможность в определённой степени независимо варьировать два параметра: величину межэлектродного зазора и степень неоднородности промежутка (радиус кривизны катода). Тогда соответствие эксперимента и теории достигается путём управления данными параметрами.

В работах [102, 103] приводится исследование генерации убегаящих электронов в элегазе атмосферного давления и сравнение полученных данных с имеющимися экспериментальными данными. Описание динамики плазмы разряда и вычисление электрического поля были приведены выше в Главе 3. Согласно общей методологии гибридной модели, мы использовали данные о мгновенных распределениях электрического поля  $E(r, t)$  и скорости генерации вторичных электронов  $\partial n_e / \partial t$  в разряде для решения кинетического уравнения Больцмана для быстрых электронов. Для электронов в среде элегаза в работах [102, 103] мы поступали аналогичным образом, с той только разницей, что для более корректного учёта эффектов, связанных с геометрическим усилением поля вблизи неоднородностей катода и высоким уровнем перенапряжения промежутка, было использовано релятивистское уравнение Больцмана

$$\gamma \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial r} + qE \frac{\partial f}{\partial p} \right) = G - V, \quad (4.8)$$

где  $f \equiv f(r, p, t)$  - пространственно-неоднородная функция распределения быстрых (убегающих) электронов,  $p = mv\gamma$  - релятивистский импульс,  $v$  - скорость убегающих электронов,  $\gamma = \sqrt{1 + (p/mc)^2}$  - релятивистский гамма-фактор. Интегралы столкновений в правой части уравнения (4.8) записаны аналогично (4.2) и (4.3)

$$G(r, p, t) = \alpha(|E|)\mu_e|E|n_e\sqrt{\frac{\xi}{\pi}}\exp(-\xi p^2),$$

$$V(r, p, t) = fN\frac{p}{m\gamma}\sigma^*(p). \quad (4.9)$$

Схема численного решения уравнения Больцмана (4.8) аналогична использованной ранее в разделе 4.2. Так как пространственное сеточное разбиение задачи изначально предполагает использование квазиоднородной сетки, то она же использовалась и для решения кинетического уравнения. Фазовое пространство покрывалось однородной по импульсам  $p$  и квазиоднородной по координате  $r$  сеткой, параметры которой совпадали с параметрами сетки макроскопического расчёта.

Предметом моделирования в работах [102, 103] стали разряды в элегазе, протекающие в близких по физическим условиям конфигурациях. Параметры коаксиального диода ( $r_c = 0.5..2$  мм,  $r_a = 10$  мм,  $U_0 = 200$  кВ) подбирались таким образом, чтобы обеспечить высокий уровень перенапряжения при значительной неоднородности электрического поля, составляющей  $E(r_c)/E(r_a) = 10..20$ .

На рисунке 4.3 (а) представлены импульсы тока убегающих электронов, которые вычислены для разных значений радиуса катода с учётом ослабления в алюминиевой фольге толщиной 10 мкм. Видно, что увеличение радиуса катода приводит к резкому уменьшению значения амплитуды тока за фольгой и одновременно к увеличению длительности импульса тока. Данный факт достаточно хорошо известен из экспериментов по измерению характеристик пучка убегающих электронов, в которых увеличение степени неоднородности промежутка ведёт к формированию мощных субнаносекундных импульсов тока. Спектральные распределения пучков убегающих электронов, вычисленных при вариации радиуса катода, даны на рисунке 4.3 (б). В частности, видно, что при бóльших радиусах катода ток пучка образован высокоэнергетической частью спектра, обладающей большей проникающей способностью. Доля этой составляющей спектра уменьшается при увеличении радиуса кривизны катода, что также качественно согласуется с тенденцией, зафиксированной в экспериментах [80]. В значительной мере указанная закономерность соотносится с появлением электронов с “аномальными” энергиями. Здесь, в отличие от плоского промежутка, можно говорить об интегральной “аномальности” энергий в спектре убегающих электронов. Действительно, из рисунка



3.6 видно, что максимальное падение напряжения за весь импульс составляет не более 160 кВ, при этом спектр содержит непрерывную составляющую в диапазоне до 180 кВ.

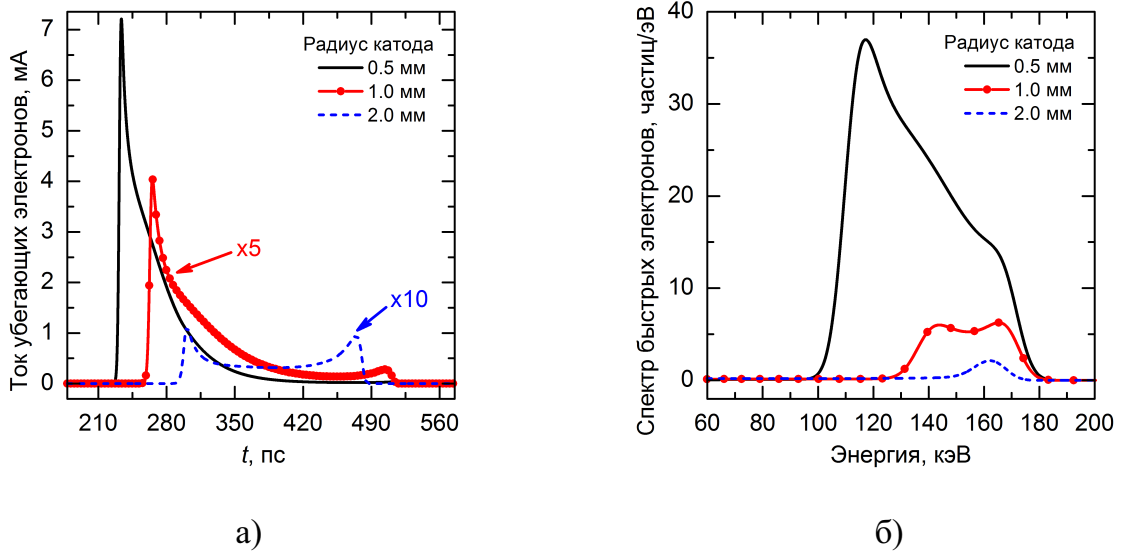


Рисунок 4.3 — Ток уходящих электронов а) и функция распределения быстрых электронов б) за анодом из алюминиевой фольги толщиной 10 мкм, вычисленные при различных значениях радиуса катода.

В соответствии с гибридной моделью, оцениваемая доля электронов с “аномальными” энергиями не превышает 10 % от общего количества уходящих электронов. Природа данного явления представляет собой разновидность поляризационного ускорения. Для оценки вклада данного эффекта рассмотрим ситуацию, когда одиночный электрон набрал энергию  $W_0 = mc^2(\gamma - 1)$  в ограниченной области  $0 < x < d$  благодаря стационарному (за время движения) электрическому полю  $E(x)$ . Следовательно,  $W_0 = q \int_0^d E(x) dx$ . Если область продольно-неоднородного электрического поля движется в пространстве с постоянной скоростью  $u < v_0 = c\sqrt{\gamma_0^2 - 1}/\gamma_0$  (для простоты полагается, что скорость  $u$  - нерелятивистская), тогда в лабораторной системе отсчёта электрон приобретёт следующую кинетическую энергию

$$W \approx W_0 \left( 1 + \frac{u}{c} \sqrt{1 + \frac{2mc^2}{W_0}} \right). \quad (4.10)$$

Ранее отмечалось, что динамика электрического поля в коаксиальном диоде представляет собой бегущую волну. Из рисунка 3.8 (Глава 3), мы видим, что скорость движения области, где электрическое поле существенно неоднородно, меняется с  $\sim 1.5 \cdot 10^9$  до  $\sim 3.8 \cdot 10^9$  см/с, что составляет порядка 10 % от скорости света. Ток быстрых электронов достигает максимального значения (рисунок 4.3) в тот момент, когда падение

напряжения на диоде соответствует  $\sim 125$  кВ. В соответствии с формулой (4.10), рассматриваемая группа электронов может ускоряться до энергий порядка 163 кэВ, что превосходит мгновенное значение приложенного напряжения.

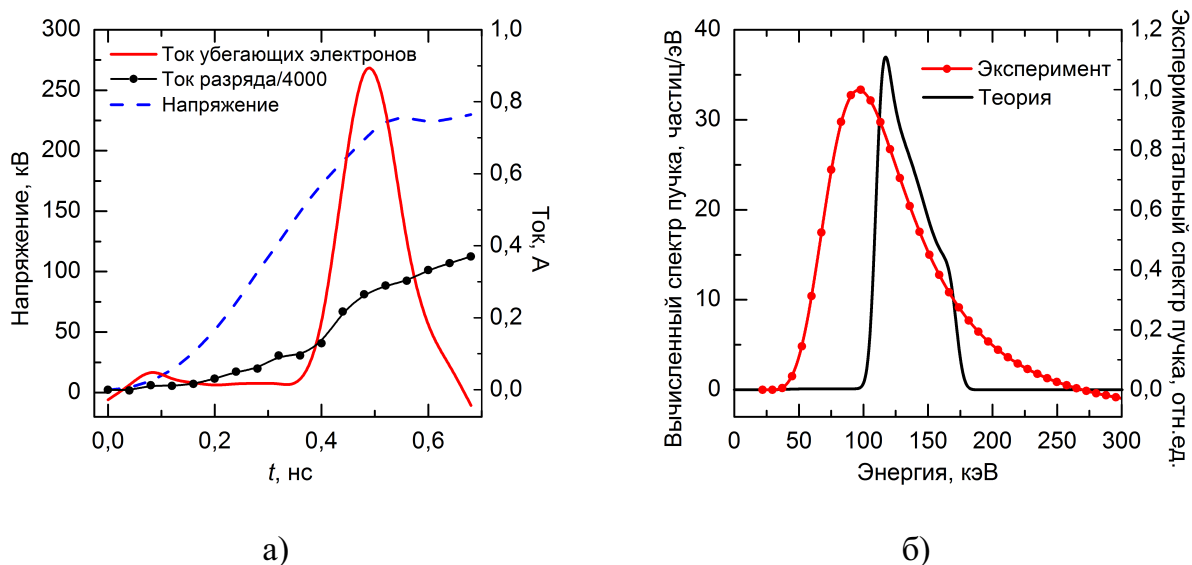


Рисунок 4.4 — Экспериментальные данные: напряжение на промежутке, ток разряда и ток убегающих электронов а), и спектры быстрых электронов б) за анодом из алюминиевой фольги толщиной 10 мкм (вычисленный гибридным кинетическим методом и восстановленный по экспериментальным данным кривой ослабления).

Результаты вычислений сравнивались с экспериментальными измерениями характеристик пучка убегающих электронов [102]. При всём понимании того, что реалистичная трёхмерная экспериментальная конфигурация неэквивалентна модельной одномерной осесимметричной, следует отметить, что параметры неоднородности диода, межэлектродного расстояния и рабочего напряжения источника могут быть хорошо сопоставлены с экспериментальными. В качестве источника питания использовался импульсный высоковольтный генератор РАДАН-220 [26], производящий импульсы амплитудой до 250 кВ с передним фронтом длительностью 0.5 нс, который подключался к газовому диоду через передающую линию с характеристическим сопротивлением 100 Ом. Диод представлял собой конфигурацию трубка-плоскость, в которой трубка была выполнена из стальной фольги толщиной 100 мкм, свернутой в цилиндр диаметром 6 мм. Межэлектродное расстояние устанавливалось равным 8 мм. За анодом, изготовленным из алюминиевой фольги толщиной 10 мкм, устанавливался низкоиндуктивный токовый коллектор с апертурой 20 мм, сигнал с которого подавался на осциллограф реального времени DPO70604 с полосой 6 ГГц и частотой семплирования 25 ГГц. Более подробно техника эксперимента описана в работе [321].

На рисунке 4.4 (а) показаны временные зависимости напряжения на диоде и полного тока диода, измеряемые с помощью емкостных делителей, расположенных непосредственно в передающей линии вблизи места подключения разрядного промежутка. На рисунке также показан субнаносекундный импульс тока быстрых электронов. Низкая частота семплирования используемого осциллографа не позволила точно воспроизвести сигнал тока коллектора (3-4 отсчёта на импульс), поэтому измеренный импульс тока имеет меньшую длительность и большую амплитуду, что больше соответствует рассчитанному теоретически. На рисунке 4.4 (б) сравнение вычисленного спектра быстрых электронов демонстрирует достаточно хорошее согласие со спектром, восстановленным по данным кривой ослабления. Ограничения экспериментальной техники, связанные с регистрацией сигнала коллектора, не позволяют задавать высокую точность решения обратной задачи по восстановлению спектра. Это делает кривую спектра менее точной, чем в теории.

Экспериментальный импульс тока пучка быстрых электронов имеет длительность на полувысоте амплитуды 0.9 нА порядка 125 пс. Исходя из этих данных, примерная оценка количества быстрых электронов даёт  $\sim 6 \cdot 10^5$  частиц. Для расчётного импульса тока быстрых электронов мы имеем длительность 25 пс на полувысоте амплитуды 7 нА, что соответствует оценке количества быстрых электронов  $\sim 11 \cdot 10^5$ . Принимая во внимание существенные различия в пространственных конфигурациях диодов в модели и в эксперименте, полученное согласие следует считать очень хорошим.

Поскольку формирование "аномальной" части спектра пучка (рисунок 4.4 (б)) представляет собой результат поляризационного ускорения, вызванного движением области усиленного электрического поля в направлении анода, то скорость фронта волны ионизации измерялась в работе [102] по нестационарному свечению разряда. Для увеличения интенсивности свечения разряда и, соответственно, более точной регистрации излучения к элегазу добавлялось 2.5 % азота. Оптическое излучение проходило сквозь боковое окно разрядной камеры и через линзу подавалось на фотодиод в металлическом экране. Дополнительно между фотодиодом и выходным окном ставилась щелевая диафрагма шириной 1 мм. Данная система обеспечивала пространственное разрешение  $\sim 1$  мм. Свечение разряда фотографировалось зеркальным фотоаппаратом. Более подробно приборы и техника эксперимента описаны в экспериментальной работе [322]. Было показано, что скорости волны ионизации равны  $\sim 3.3 \cdot 10^9$  и  $\sim 1.3 \cdot 10^{10}$  см/с для распространения волны от катода к середине промежутка и от середины к плоскости анода, соответственно, что также хорошо согласуется с теоретическими результатами.

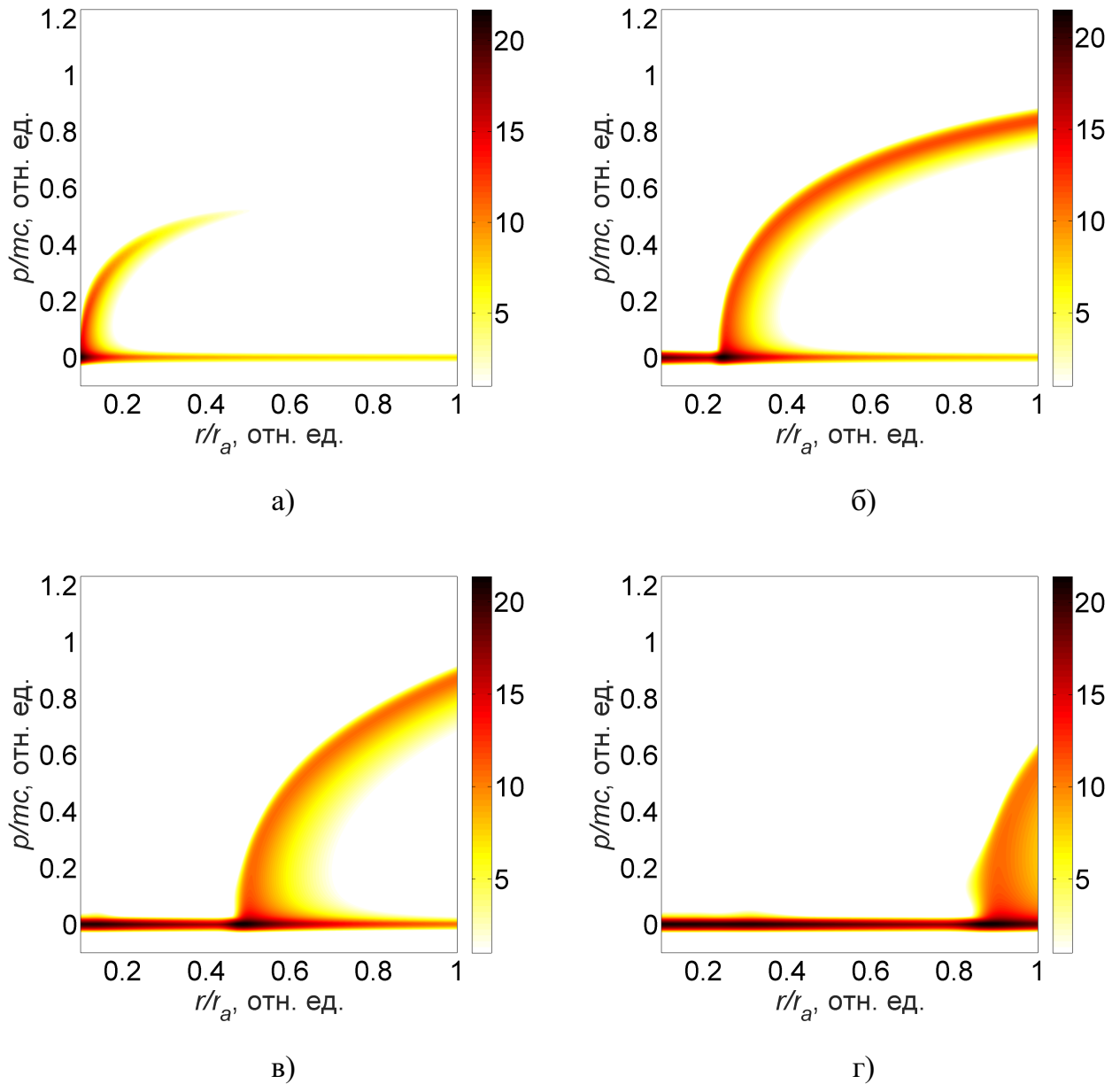


Рисунок 4.5 — Денситограммы функции распределения убегающих электронов, соответствующие следующим моментам времени: а) 200 пс; б) 300 пс; в) 400 пс; г) 500 пс.

Наиболее точно динамику зарождения и эволюции пучка убегающих электронов в разряде демонстрируют денситограммы мгновенных распределений функции плотности  $f(r, p, t)$  убегающих электронов, представленные на рисунках 4.5 а)-г) в логарифмическом масштабе. В момент времени 0.2 нс начинается формирование потока убегающих электронов в непосредственной близости от цилиндрического катода, где находится передний фронт волны ионизации. В этот момент времени ток убегающих электронов за фольгой ещё равен нулю, т.к. их поток не достиг анода, хотя, как можно видеть на денситограмме (а), быстрые электроны значительно опережают фронт волны ионизации.

В следующий момент времени 0.3 нс поток убегающих электронов уже достиг анода, а полный ток разряда всё ещё мал из-за того, что плотная плазма в теле волны ионизации пока не достигла анода. Фронт волны ионизации находится на расстоянии 1.5 мм от катода. На этом этапе формируется основной максимум тока быстрых электронов за фольгой 4.3 (б). В момент времени 0.4 нс динамика убегающих электронов также присутствует, хотя их кинетическая энергия уже идёт на убыль и происходит формирование второго (низкоэнергетичного) максимума спектра быстрых электронов. Наконец, при  $t = 0.5$  нс волна ионизации почти достигает анода, что приводит к формированию низкоэнергетичной части спектра быстрых электронов.

Методика восстановления спектральных распределений пучков быстрых электронов по данным кривых ослабления, описанная в Главе 2, была направлена на восстановление энергетических распределений при наличии систематических и случайных ошибок, вносимых различными экспериментальными факторами. Одной из важнейших причин, по которой кривая ослабления может содержать значительные погрешности, является неопределённость условий предыонизации (предварительной ионизации), которые формируются в газовом диоде, работающем в импульсно-периодическом режиме. Форма предыонизации может зависеть от предыстории, т.е. разрядов, предшествующих моменту времени возможного измерения. Влияние предварительной ионизации газа в промежутке на параметры пучков убегающих электронов достаточно трудно исследовать экспериментально.

Теоретическая модель, предложенная в настоящей главе, позволяет в деталях проследить за появлением и переносом группы убегающих электронов в зависимости от начального профиля предварительной ионизации в промежутке. Подобные исследования проводились в рамках гибридной модели, а их основные результаты изложены в работе [105], где внимание сосредоточено на различии двух режимов развития высоковольтного пробоя газа в осесимметричной конфигурации диода. Речь идёт о режиме пробоя с предварительно ионизованным газом во всём объёме промежутка и режиме пробоя, при котором незначительное количество начальных электронов присутствует только вблизи катода с малым радиусом кривизны. Первый режим условно можно назвать режимом *однородного инициирования* пробоя, а второй – режимом *прикатодного инициирования*.

В рамках предложенной стратегии исследования влияния неоднородной предыонизации моделировалась конфигурация газового диода, заполненного элегазом атмосферного давления с параметрами:  $r_c = 1$  мм,  $r_a = 10$  мм,  $L = 1$  см. На него через балластное сопротивление  $R = 75$  Ом подавался импульс напряжения амплитудой 200 кВ с длительностью переднего фронта 0.3 нс по уровню 0.1 – 0.9 от максимального. В остальном

параметры теоретической гибридной модели, элементарных процессов и транспортного сечения рассеяния совпадали с изложенными выше в данном разделе.

Ниже рассматриваются более подробно два сценария формирования разряда и генерации убегающих электронов, возникающих при различных начальных условиях. Первый сценарий (а) реализован заданием объёмной равномерной предварительной ионизации промежутка с уровнем концентрации квазинейтральной плазмы порядка  $n_e(r, t = 0) = 10^3 \text{ см}^{-3}$ . Второй сценарий (б) реализовывался заданием экспоненциально спадающей начальной концентрации  $n_e(r, t = 0) = 10^3 \exp(-100r/r_a) \text{ см}^{-3}$ . Численным параметром в экспоненте данного выражения мы добивались того, что уже к середине промежутка концентрация плазмы спадала до нуля. Сценарий (б) можно рассматривать как теоретическую имитацию слабой эмиссии электронов с катода в отсутствие объёмной предварительной ионизации газа. Расчётные зависимости для двух вариантов предыонизации, вычисленные при остальных неизменных параметрах задачи, показаны на рисунке 4.6.

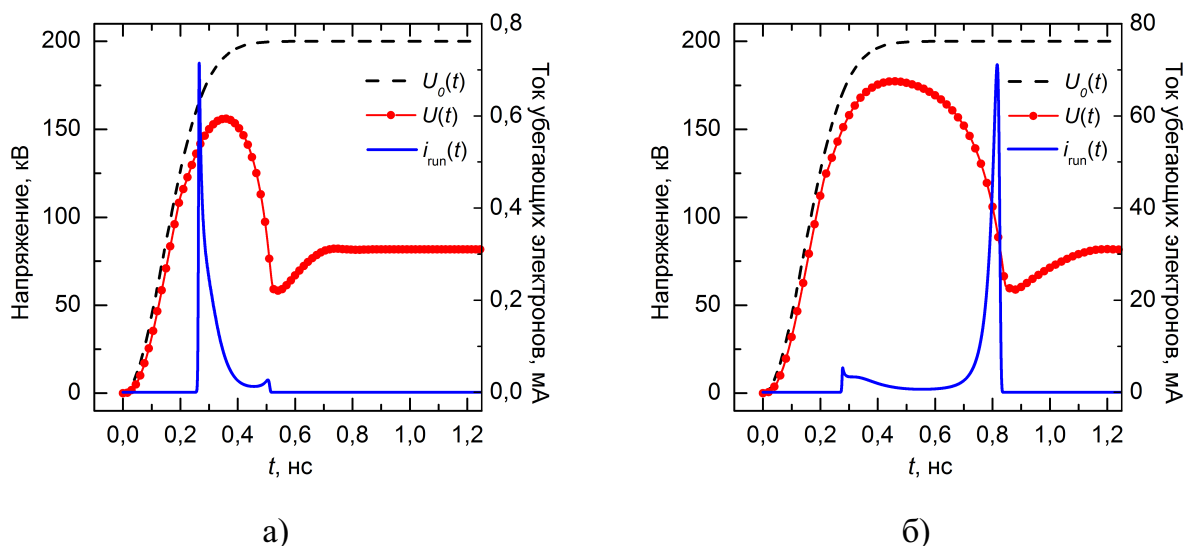


Рисунок 4.6 — Зависимости от времени тока убегающих электронов за фольгой  $i_{run}(t)$ , напряжения источника питания  $U_0(t)$  и падения напряжения на промежутке  $U(t)$  для однородной (а) и неоднородной (б) начальных ионизаций промежутка.

Как и следовало ожидать, сценарий пробоя (а) характеризуется меньшим временем протекания, чем по сценарию (б), так как в первом случае хорошо проводящая плазма сразу формируется не только вблизи катода, но и по всей длине разрядного промежутка. В обоих сценариях присутствует начальный этап протекания емкостного тока при зарядке межэлектродной ёмкости, завершающийся к моменту времени  $\sim 0.2$  нс. В сценарии (а) после этого сразу начинается быстрый рост тока проводимости, завершающийся фазой коммутации, когда напряжение на промежутке начинает спадать. Напротив, в

сценарии (б) наблюдается затянутая фаза квазистационарного тока, когда вблизи катода он переносится в плазме, а вблизи анода сохраняется емкостной характер тока смещения. Различия динамики развития разряда в двух сценариях лучше всего видны на рисунке 4.7, где показаны полученные в расчёте пространственные распределения напряжённости электрического поля через равные промежутки времени.

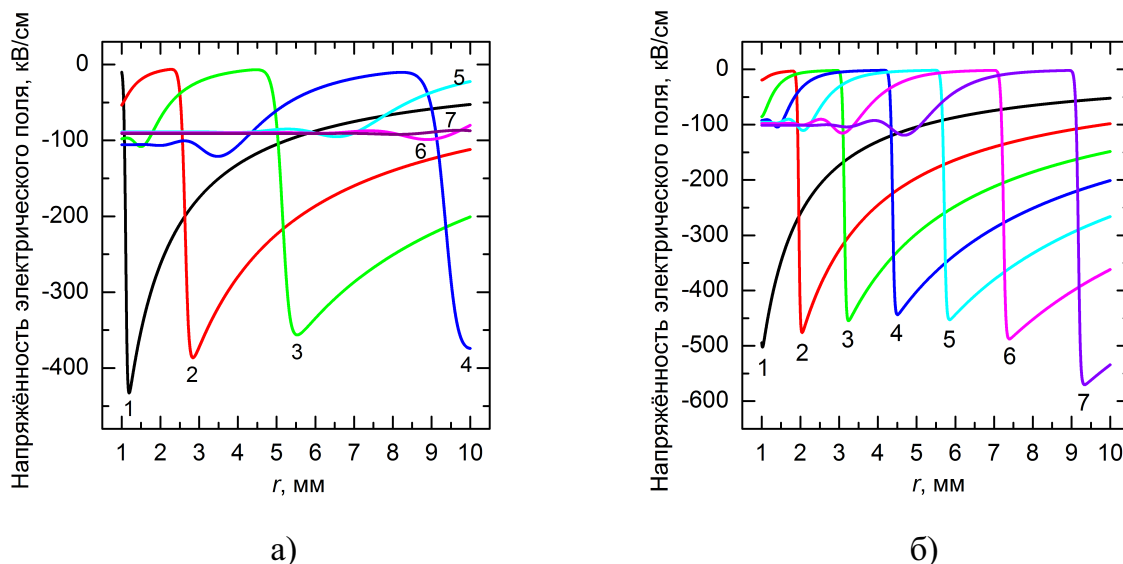


Рисунок 4.7 — Распределения напряжённости электрического поля для сценариев развития разряда (а) и (б) в различные моменты времени: 1 - 0.21 нс, 2 – 0.31 нс, 3 – 0.41 нс, 4 – 0.51 нс, 5 – 0.61 нс, 6 – 0.71 нс, 7 – 0.81 нс.

С позиций макроскопического описания основной особенностью быстрого разряда с неоднородной начальной ионизацией является почти равномерное движение фронта волны ионизации к аноду со скоростью  $\sim 1.3 \cdot 10^7$  см/с. Отсутствие заряженных частиц в промежутке между анодом и фронтом плотной плазмы в сценарии (б) заметно влияет на абсолютную величину напряжённости электрического поля в заключительной фазе коммутации промежутка. Несмотря на снижение полного падения напряжения на промежутке к этому моменту, напряжённость поля у анода в сценарии (б) постепенно возрастает, что отличает его от картины сценария (а). Это коренным образом сказывается на амплитуде и форме импульса тока быстрых электронов (рисунок 4.6). В сценарии (б) импульс тока быстрых электронов имеет на два порядка бóльшую амплитуду, а время появления основного импульса приходится на стадию спада диодного напряжения. В сценарии (а) импульс тока существенно короче, и весь он сосредоточен на переднем фронте падения напряжения на диоде. Для того чтобы понять причину столь больших различий параметров потоков убегających электронов, требуется детально проследить процесс их зарождения и ускорения до больших скоростей.

Убегающие электроны разряда возникают на фронте волны ионизации, где одновременно присутствуют и высокая напряжённость поля, и высокая концентрация медленных (плазменных) электронов. Набор кинетической энергии частью медленных электронов разряда до энергий, которые находятся в “хвосте” функции распределения, приводит к непрерывному уменьшению сечения рассеивающих столкновений, в результате чего формируется поток быстрых убегающих электронов. Место возникновения и мгновенный спектр электронов в коаксиальном диоде для двух сценариев показаны на денситограммах функций распределения на рисунке 4.8.

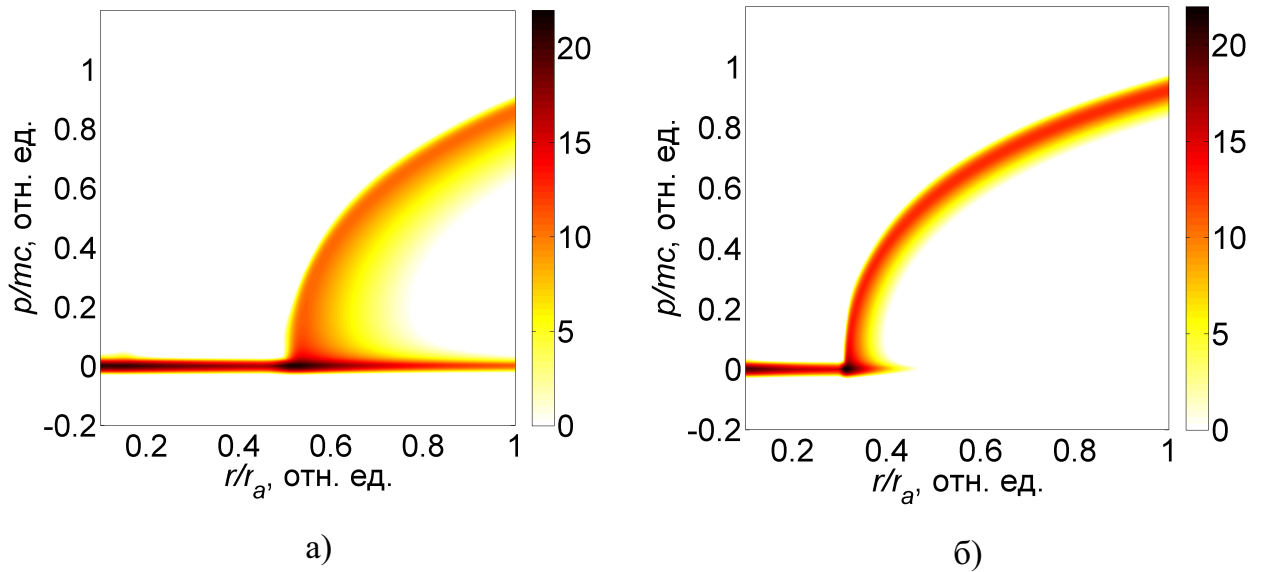


Рисунок 4.8 — Функция распределения (десятичный логарифм)  $f(r, p, t = 0.41 \text{ нс})$  нестолкнувшихся электронов для разрядов с равномерной (а) и неравномерной (б) предварительной ионизацией.

Одним из важных аспектов верификации результатов расчётов является возможность сравнения интегрального спектра быстрых электронов с имеющимися экспериментальными данными. Интегральный спектр представляет собой суммарный спектр быстрых электронов за всё время рассмотрения системы, равное длительности импульса напряжения источника, который представляется следующим выражением:

$$N(v) \sim \tau(\varepsilon(v), d_i) \int_0^{t_{\text{pulse}}} f(r_a, p(v), t) dt, \quad (4.11)$$

в котором  $t_{\text{pulse}}$  - полное время рассмотрения (длительность импульса).

Интегральные спектры (за алюминиевой фольгой толщиной 10 мкм) в абсолютных единицах для обоих сценариев приведены на рисунке 4.9. Как видно, спектры быст-



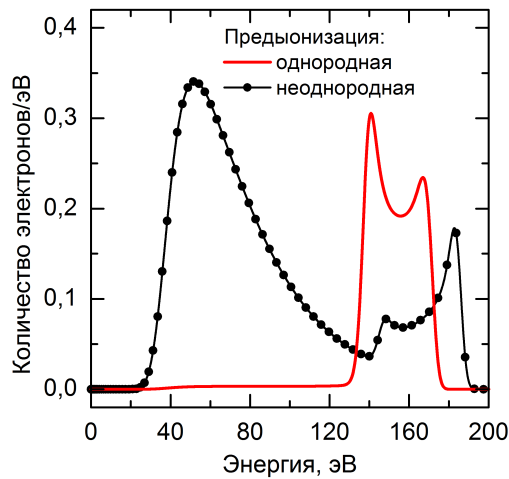


Рисунок 4.9 — Интегральный спектр убегающих электронов за алюминиевой анодной фольгой толщиной 10 мкм для разрядов с равномерной (значения увеличены в 50 раз) и неравномерной предыонизацией газа в диоде.

рых электронов в обоих случаях представляют собой немонотонные зависимости от энергии, природа которых заключается в том, что разные группы быстрых электронов формируются на разных стадиях развития разряда. Для сценария (а) группа с энергией  $\sim 165$  эВ сформировалась на первых стадиях развития разряда, т.е.  $\sim 150 - 200$  пс, и приобрела свою высокую кинетическую энергию, двигаясь всё время в нарастающем электрическом поле (см. рисунок 4.7). Вторая группа с энергией  $\sim 142$  эВ сформировалась на промежуточной стадии разряда  $\sim 200 - 250$  пс. Обе группы, стартуя из различных мест промежутка, и, набирая различные кинетические энергии, практически одновременно достигают анода и формируют очень крутой передний фронт и острый первый максимум импульса тока быстрых электронов. На заключительной стадии  $\sim 400 - 500$  пс формируется низкоэнергетическое основание спектра ( $\sim 40 - 130$  кэВ), которое обеспечивает медленно спадающий задний фронт импульса тока. Момент прихода фронта ионизации к аноду отмечен на графике тока небольшим всплеском.

Для второго сценария картина формирования спектра выглядит иначе. Высокоэнергетичная группа  $\sim 150 - 180$  кэВ формируется на протяжении длительной стадии высокого падения напряжения на диоде  $\sim 300 - 700$  пс, при этом амплитуда тока быстрых электронов на этой стадии невелика. Основной максимум тока обусловлен приходом на анод фронта волны ионизации с группой убегающих электронов, сформировавшихся в сильном электрическом поле (кривые 6 и 7 на рисунке 4.7 (б)). В результате формируется значительная по численности группа электронов с довольно широким энергетическим спектром и относительно низкой средней энергией  $\sim 40 - 80$  кэВ.

Увеличение времени прохождения волны ионизации при отсутствии предварительной ионизирующей подсветки промежутка или другой предыстории начального распределения приводит к уширению импульса и увеличению амплитуды и длительности импульса тока убегающих электронов. Также сильно меняется спектр убегающих электронов. В режиме без предварительной ионизации основной вклад в ток убегающих электронов вносят электроны средних энергий, которые генерируются в переходной области перед фронтом ионизации около анода.

С позиции обширной существующей экспериментальной базы [80] важно отметить, что наличие предыонизации промежутка может приводить к снижению количества быстрых электронов в разряде примерно на два порядка величины. Именно такой эффект был отмечен в работе [323], в которой эксперименты проводились в гелии и азоте при пониженных давлениях и амплитуде импульса напряжения 25 кВ. Включение дополнительной подсветки разрядного промежутка вспомогательным барьерным разрядом в целях стабилизации генерации убегающих электронов от импульса к импульсу привело к полному исчезновению потока убегающих электронов. Это не удивительно, поскольку при столь низких амплитудах напряжения амплитуды токов быстрых электронов регистрируются на миллиамперном уровне, и снижение тока на два порядка не позволяло его зафиксировать при имеющемся уровне шумов и временном разрешении аппаратуры. Как и авторы работы [323], автор данной диссертации полагает, что механизм влияния подсветки на разряды в гелии и азоте аналогичен механизму, смоделированному для разряда в элегазе.

В работе [105] были проанализированы только два полярных по своим параметрам варианта предыонизации газа: однородная и резко неоднородная, прижатая к катоду. Исследование влияния предварительной ионизации газа (элегаза) в промежутке на параметры пучка убегающих электронов были продолжены в работах [108, 109], где начальное условие для распределения квазинейтральной плазмы задавалось в виде гауссовой функции  $n_0(r) \sim \exp(-\beta r^2/r_a^2)$ , где  $\beta$  - параметр неоднородности. Значение данного параметра выбиралось равным  $\beta = -16, \beta = 0, \beta = 16$ , а коэффициент пропорциональности вычислялся из условия постоянства количества заряженных частиц, т.е.  $\int_{r_c}^{r_a} n_0(r) 2\pi r dr = const$ . При величинах  $\beta = \pm 16$  начальная концентрация у одного из электродов на семь порядков отличалась от концентрации у другого! Поэтому при больших положительных  $\beta$  можно говорить о прикатодной, а при больших отрицательных  $\beta$  - о прианодной предыонизации промежутка (случай  $\beta = 0$  изначально соответствует однородной начальной ионизации).

На рисунке 4.10 (а) приведены вычисленные временные зависимости напряжения горения разряда и тока быстрых электронов для наносекундного разряда в элегазе

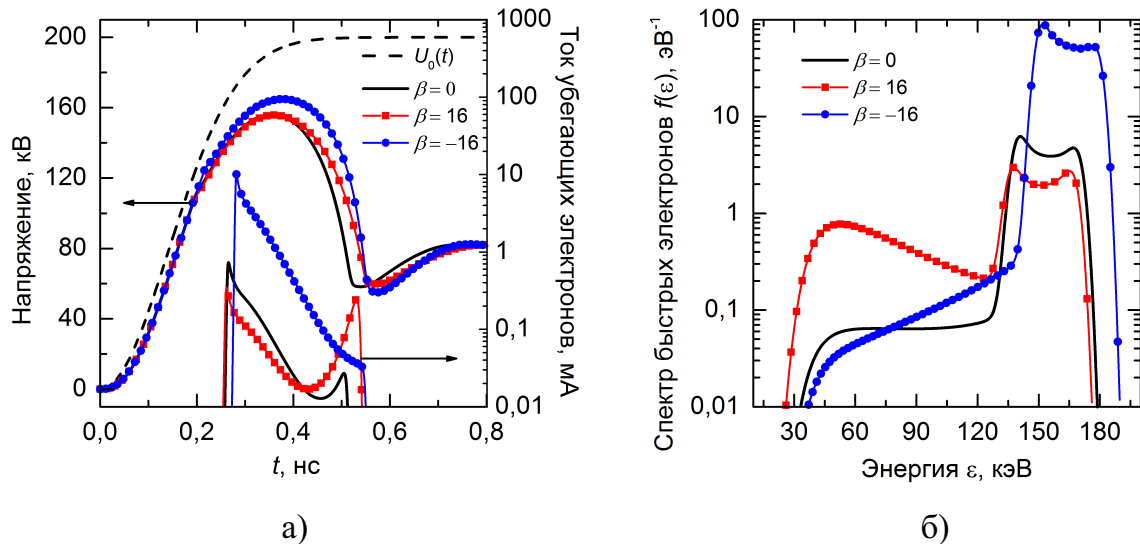


Рисунок 4.10 — а) Временные зависимости напряжения источника питания  $U_0(t)$ , напряжения на диоде и тока быстрых электронов за фольгой при различных начальных распределениях плазмы:  $\beta = 0$  (однородная предварительная ионизация),  $\beta = 16$  (прикатодная предварительная ионизация),  $\beta = -16$  (прианодная предварительная ионизация); б) Интегральные энергетические спектры быстрых электронов за фольгой.

атмосферного давления в коаксиальном диоде с параметрами, аналогичными использованным выше для случая неоднородного профиля предыонизации. Из рисунка 4.10 (а) видно, что количество быстрых электронов в случае “прианодного” инициирования примерно на порядок выше, чем в других режимах (масштаб шкалы для токов пучка выбран логарифмическим). В первую очередь, это напрямую связано с большей амплитудой напряжения на промежутке, а следовательно, и с большей вероятностью перехода плазменных вторичных электронов в режим непрерывного ускорения. Кроме того, в режиме прикатодного инициирования ток пучка состоит из двух импульсов: первый связан приходом на анод опережающей группы убегающих электронов, рожденных на ранней стадии пробоя в области плотной прикатодной плазмы. Второй импульс обусловлен приходом на анод фронта волны ионизации, т.е. плотной плазмы разряда. Средняя энергия электронов во втором импульсе тока существенно ниже, чем в первой группе. На рисунке 4.10 (б) показаны энергетические спектры быстрых электронов для трёх рассматриваемых режимов предварительной ионизации. Очевидно, что в режиме “прикатодного” инициирования спектр быстрых электронов довольно широкий и, в отличие от двух других режимов предыонизации, имеет двухмодовую структуру. На качественном уровне данные расчётов согласуются с результатами экспериментов, приведёнными в работе [324], в которой в субнаносекундном разряде в диоде, имеющем стержневой катод отчётливо наблюдалась двухмодовая форма импульса тока и энергетического спектра убегающих электронов.

Очевидно, что в реальных условиях физического эксперимента имеет место широкий разброс возможных неоднородностей, вызванный флуктуациями источников подсветки, особенностями конструкции газового диода, а также предысторией начального ионизованного состояния. По этой причине вариации параметров пучка быстрых электронов, наблюдаемых в эксперименте, зачастую велики даже в одной и той же серии экспериментов, о чём неоднократно отмечалось в литературе [23, 291].

## 4.4 Выводы

- Впервые для моделирования газовых разрядов с убегающими электронами предложено использовать гибридный подход к построению теоретических моделей разрядов высокого давления. В основе подхода лежит разделение всех электронов в плазме на “медленные” (плазменные) и “быстрые” (убегающие), что предполагает различное описание этих двух компонент - гидродинамическое и кинетическое, соответственно. Предложенный подход имеет ряд несомненных достоинств, заключающихся в том, например, что кинетическое уравнение Больцмана требуется решать только для убегающих электронов, которые рождаются, движутся и гибнут в условиях протекания газового разряда, т.е. в электрическом поле, создаваемом медленными частицами. Группы быстрых электронов в разрядах рассматриваемого типа малочисленны, поэтому они не оказывают значительного влияния на общую динамику газовых разрядов, следовательно вводить обратную связь решения кинетического уравнения с макроскопическим описанием плазмы разряда не требуется. Использование данного приближения ограничивается гибридным моделированием разрядов высокого (атмосферного) давления. Однако более точно очертить границы области применимости и указать путь к расширению пределов применимости подхода позволит сопоставление результатов моделирования в рамках гибридной и полностью кинетических моделей;
- Возможности предложенного гибридного подхода в полной мере продемонстрированы на примере решения двух задач о развитии разрядов высокого давления и сопутствующих им генерациях пучков убегающих электронов в одномерной декартовой и осесимметричной пространственных постановках. Впервые были изучены пространственно-временные характеристики потоков убегающих электронов, включая локализацию места их зарождения в разряде и временную эволюцию функции распределения. Результаты моделирования были сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в конфигурациях с близкими по физическим параметрам условиях. Сравнение демонстрирует хорошее согласие с экспериментом по характеристикам тока пучка убегающих электронов и его спектральному составу. В отличие от планарной, в

осесимметричной пространственно-неоднородной геометрии диода появляется группа электронов, энергия которых превышает  $qU_{max}$ ;

- На основе гибридной теоретической модели газового разряда с убегаящими электронами было выявлено сильное влияние режимов неоднородной начальной ионизации на параметры генерируемого пучка убегаящих электронов. В частности было показано, что “прикатодное” инициирование разряда может приводить к двухмодовой структуре импульса тока пучка, часто наблюдаемой в экспериментах;
- Методология гибридного моделирования открывает широкие возможности для детерминистического описания разрядов в двумерных и трёхмерных конфигурациях, поскольку она позволяет комбинировать различные пространственные размерности для описания “медленного” и “быстрого” компонентов разряда. Например, для изучения динамики быстрых электронов в системе острие-плоскость, достаточно провести гидродинамический расчёт динамики плазмы разряда в двумерно-осесимметричной модели, а параметры пучка быстрых электронов рассчитывать используя одномерное уравнение Больцмана на оси симметрии задачи, вблизи которой формируется основной поток убегаящих электронов. Данный подход был успешно использован в работах [76–79] по моделированию двумерной конфигурации газового диода с сеточным катодом.

## Глава 5

# Кинетическое моделирование быстрых разрядов с убегающими электронами

Гибридный теоретический подход представляет собой удобный инструмент для моделирования потоков убегающих электронов в газовых разрядах высокого давления. Как отмечалось выше (см. Главу 4), его простота и надёжность, в первую очередь, объясняются отсутствием обратной связи между вычислением функции распределения убегающих электронов и вычислением макроскопических характеристик плазмы основного разряда. На физическом уровне, отсутствие такой обратной связи основано на представлении о пренебрежимо малом воздействии потоков убегающих электронов на формирование пространственно-временной структуры газового разряда при высоких давлениях газа [122]. Малость воздействия обусловлена тем, что реальная доля убегающих электронов в разрядах высокого давления составляет не более  $10^{-5} - 10^{-4}$  [80]. Принципиальным недостатком гибридной модели является невозможность учёта ионизации газа потоками убегающих электронов, возникающими в разряде, что делает невозможным применение такой модели для рассмотрения разрядов низких давлений. Поэтому следующим шагом в построении более реалистичной модели должен быть переход к полностью кинетическому описанию всего ансамбля электронов разряда, а не только малой части убегающих. Этот подход позволяет полностью отказаться от гидродинамического описания движения электронов и использования локально-полевого приближения для скорости дрейфа и констант реакций (коэффициентов Таунсенда). Важное преимущество последовательного кинетического описания электронов на основе уравнения Больцмана состоит в возможности наблюдения за эволюцией

всего спектра электронов в разряде, начиная от тепловых (плазменных) электронов до быстрых электронов с релятивистскими скоростями. При этом нет необходимости заранее выделять группу ускоренных в “надкритическом” поле электронов, которые впоследствии будут убегающими. В предложенных моделях также не используется само понятие “критического” поля, так как появление убегающих электронов в “хвосте” функции распределения естественным образом реализуется при решении уравнения Больцмана. Также стоит отметить, что кинетический метод расчёта является единственным способом описания генерации убегающих электронов при уровне напряжённости электрических полей, существенно ниже величины “критического” поля (см. Главу 1).

При уменьшении рабочего давления газа вклад быстрых электронов в токопротекание возрастает, поскольку доля самих убегающих электронов растёт с увеличением длины свободного пробега электрона. В таких разрядах движение волны ионизации ускоряется за счёт дополнительной предыонизации газа убегающими электронами в пространстве перед фронтом волны. Оно носит характер “размывания” ударного фронта волны концентрации плазмы. Если рассматривать случай, в котором напряжённость электрического поля в промежутке превышает статические пробивные значения, то данные виды газового разряда формально могут быть описаны и макроскопическими (гидродинамическими) моделями, однако их описание будет значительно расходиться с результатами экспериментальных наблюдений структуры и динамики разрядов. Подобные разряды можно условно назвать *разрядами, поддерживаемыми пучками убегающих электронов*. Их корректное моделирование возможно только в рамках кинетического подхода, суть которого заключается в том, что электронная компонента плазмы разряда описывается уравнением Больцмана, а остальные компоненты подчиняются макроскопическим (гидродинамическим) уравнениям, либо также описываются кинетическими уравнениями. Ещё одной важной областью применения чисто кинетического подхода в физике газового разряда является рассмотрение т.н. *пробоя на убегающих электронах* [133]. Он представляет собой процесс формирования высоко проводящего плазменного канала, происходящий в электрических полях, напряжённости которых существенно ниже статических пробивных значений, но выше “критических”. Именно убегающие электроны создают в них условия возникновения пробоя, чем, в частности, объясняется происхождение атмосферных молний. Также существуют экспериментальные данные и теоретические оценки, говорящие о том, что пробоем на убегающих электронах играет определяющую роль в развитии гигантских высотных разрядов типа “блю джет” и “спрайт” [56]. Учитывая пространственные масштабы подобных явлений и кинетическую природу явления убегания электронов, можно сказать что высотные

разряды представляют собой пример широкомасштабных проявлений кинетических эффектов в газах.

Разумеется, следует понимать, что использование полностью кинетического подхода вместо гибридного всегда в значительной степени усложняет математическую модель рассматриваемого процесса и сопряжённую процедуру численного решения. Дело в том, что описание полного ансамбля электронов разряда в терминах функции распределения требует достаточно аккуратной и полной формулировки интегралов упругих и неупругих столкновений, что далеко не всегда можно сделать непротиворечивым образом. Структура интегралов столкновений в гибридной модели гораздо проще из-за того что они описывают рождение и гибель только быстрых (убегающих) электронов.

Задача данной главы диссертационной работы - это построение полной кинетической модели газового разряда высокого давления в одномерной пространственной формулировке с целью сравнения полученных результатов моделирования с основными выводами предыдущей главы. Изложенные принципы построения могут быть применены для рассмотрения случаев развития электрических разрядов, в которых убегающие электроны играют решающую роль, как это имеет место в слабых электрических полях и в условиях низких давлений газа.

## **5.1 Основные теоретические положения кинетического моделирования**

Сформулируем полностью кинетическую модель для быстропотекающего газового разряда, возникающего в результате подачи на промежутки импульса высокого напряжения наносекундной длительности. Предлагаемую модель, следуя неофициальной терминологии, используемой для макроскопических моделей [303], можно назвать “минимальной кинетической”, поскольку она содержит кинетическое описание лишь тех процессов, которые вносят существенный вклад в формирование разряда с убегающими электронами при наносекундных временных масштабах.

Исходя из того, что во всех исследуемых режимах значимые процессы протекают в субнаносекундном временном диапазоне, в рамках минимальной модели мы полностью пренебрегаем движением ионов. Следует заметить, что учёт движения ионов в дополнительных тестовых расчётах не приводит к сколь-либо заметным изменениям в результатах по сравнению с “минимальной” моделью. Как делалось ранее, целесообразно исключить из рассмотрения любые процессы рекомбинации частиц, т.к. их характерные времена протекания составляют величины порядка  $\sim 1 - 10$  мкс, что оказывает незначительное влияние на динамику развития наносекундного разряда. Также без



потери общности можно рассматривать неэлектроотрицательный газ, разрядная плазма которого состоит только из электронов и ионов одного типа. Основываясь на всём сказанном выше, нет необходимости использовать для ионов кинетическое уравнение, - их распределение можно описывать макроскопическим уравнением непрерывности следующего вида:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(\vec{x}, \vec{p}, t) d\vec{p}, \quad (5.1)$$

где  $\vec{x}$  и  $\vec{p}$  - координаты в фазовом пространстве, а функция  $S_i$  представляет собой источник генерации ионов, состоящий из всех интегралов неупругих (ионизационных) столкновений электронов с нейтральными частицами.

Динамика всех электронов разряда в неоднородном нестационарном электрическом поле  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ , которое согласованным образом определяется из решения системы уравнений Максвелла или уравнения Пуассона, описывается релятивистским кинетическим уравнением Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + q\vec{E}(\vec{x}, t) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = (Q_+ - Q_- + S_t)/\gamma, \quad (5.2)$$

где  $\gamma$  - релятивистский гамма-фактор,  $f$  - функция распределения электронов,  $Q_-$  и  $Q_+$  - источники гибели и генерации электронов в данном элементе фазового пространства за счёт неупругих процессов,  $S_t$  - источник изменения функции распределения электронов под действием упругих процессов рассеяния электронов на нейтральных атомах/молекулах. Отсюда в уравнении (5.1) источник генерации ионов определяется следующим образом  $S_i \equiv Q_+ - Q_-$ .

Для согласованного учёта изменения электростатического поля, система уравнений (5.1) и (5.2) дополняется уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \phi = \frac{q}{\varepsilon_0} (n_e - n_i), \quad \vec{E} = -\nabla \phi, \quad (5.3)$$

где концентрация электронов определяется как нулевой момент функции распределения  $n_e = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\vec{p}$ . Аналогичным образом, при необходимости учёта быстропротекающих электродинамических процессов, вместо (5.3) можно замкнуть систему уравнений

(5.1)-(5.2), дополнив её системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0}(n_i - n_e), \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \nabla \vec{H} = 0, \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{cases} \quad (5.4)$$

где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума,  $\vec{H}$  - вектор напряжённости магнитного поля,  $\vec{j}_e$  - плотность тока электронов, определяемая как соответствующий момент функции распределения  $\vec{j}_e = q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{p}}{m\gamma} f(\vec{x}, \vec{p}, t) d\vec{p}$ . Параметры внешней электрической цепи, в которой подключено рассматриваемое газоразрядное устройство, вводятся путём наложения соответствующих граничных условий на решения уравнений Максвелла (5.13).

## 5.2 Формулировка интегралов упругих и неупругих столкновений

В общем виде задание интегралов столкновений в уравнении Больцмана представляет собой сложную научную задачу, решение которой предполагает запись замкнутой формы правой части уравнения для конкретного набора рассматриваемых физических процессов. Следуя работе А.В. Гуревича [55], интеграл столкновений  $S(f, F_m)$  для взаимодействия быстрых электронов с веществом может быть представлен в виде суммы

$$S(f, F_m) = S_t(f) + S_i(f) + S_{\pm}(f), \quad (5.5)$$

где  $S_t(f)$  - интеграл упругих столкновений электронов с нейтральными частицами,  $S_i(f)$  - интеграл неупругих столкновений (ионизационный),  $S_{\pm}(f)$  - интеграл столкновений, отвечающий за генерацию электрон-позитронных пар.

Исходя из того, что мы рассматриваем разрядные процессы в слабо-ионизованной плазме газового разряда, концентрация электронов  $n_e \ll N$  ( $N$  - число Лошмидта), поэтому общий интеграл столкновений можно представить в виде линейного выражения  $S(f, F_m)$  [325]

$$S(f, F_m) = N \int \int d\vec{v}_1 d\Omega u \left[ q_-(u, \theta) f(\vec{v}) F_m(\vec{v}_1) - q_+(u, \theta) f(\vec{v}') F_m(\vec{v}'_1) \right], \quad (5.6)$$

где  $\vec{v}, \vec{v}'$  - скорости электронов до и после столкновений,  $\vec{v}_1, \vec{v}'_1$  - скорости нейтралов до и после столкновений,  $u = |\vec{v} - \vec{v}_1|$ ,  $\theta$  - угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{v}' - \vec{v}'_1$ ,  $\Omega$  - угол между направлением векторов  $\vec{v} - \vec{v}_1$  и  $\vec{v}' - \vec{v}'_1$ ,  $q_{\pm}$  - дифференциальное сечение столкновений,  $f$  - функция распределения электронов,  $F_m$  - функция распределения нейтральных молекул. Скорость и импульс связаны релятивистским соотношением  $\vec{p} = m\vec{v}\gamma$ .

Если вначале рассматривать только упругие столкновения, учитывая что масса электрона  $m$  много меньше массы нейтральной частицы  $M$ , то каждое столкновение с нейтралом слабо меняет значение энергии электрона и абсолютное значение его скорости. Это позволяет утверждать, что функция распределения близка к сферически-симметричной, а следовательно её можно разложить по полиномам Лежандра  $P_k$ , ограничивая дальнейшее рассмотрение двумя первыми слагаемыми [326]

$$f(\vec{v}) = \sum_{s=0}^{\infty} f_k(v) P_k(\cos \theta) \approx f_0(v) + f_1(v) \cos \theta, \quad (5.7)$$

а так как интеграл столкновений (5.6) линеен по  $f(\vec{v})$ , то он представляется также в виде суммы  $S_t(f) \approx I_c(v) + I_c(f_1 \cos \theta)$ , которая является суть разложением по малому параметру  $\sqrt{m/M}$ . Здесь сферически-симметричное слагаемое функции распределения  $f_0(v)$  - есть распределение электронов по энергиям.

Данное приближение для интегралов упругих столкновений достаточно точное, поскольку высшие члены разложения из-за ортогональности полиномов Лежандра дадут нулевой вклад в окончательные выражения. Дальнейшее упрощение нетрудно сделать, принимая во внимание, что скорость нейтральных частиц много меньше скорости налетающего электрона ( $v_1 \ll v$ ) и меняется при соударении незначительно, а также и то, что сама скорость электрона  $\vec{v}$  мало меняется по абсолютной величине. В результате применения приближений получаем следующие выражения для членов разложения интеграла упругих столкновений:

$$I_c(f_0) = N \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^4 \sigma_t(v) \left( f_0 + \frac{kT}{mv} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \right], \quad (5.8)$$

$$I_c(f_1 \cos \theta) = -N v \sigma_t(v) f_1(v) \cos \theta, \quad (5.9)$$

где  $T$  - средняя температура электронов,  $\sigma_t$  - транспортное сечение столкновений электронов с нейтральными частицами.

Интеграл столкновений (5.8) представлен в дифференциальной форме и имеет общий вид диффузионного члена в уравнениях переноса. Он носит название *слагаемого*

*Фоккера-Планка*. Его диффузионный характер отражает тот факт, что энергия электрона меняется под действием достаточно большого количества последовательных упругих соударений. Второе слагаемое разложения (5.9) имеет характерный вид оператора Крука или тау-приближения [274], т.е.  $I_c = -f_1 \cos \theta / \tau$ , где  $\tau = 1/(Nv\sigma_t(v))$  - время свободного пробега электрона. Тау-приближение указывает на то, что направление скорости электрона значительно изменяется от столкновения к столкновению, причём можно считать направление после столкновения независимым от скорости электрона перед соударением.

Ключевую роль в развитии разряда с убегающими электронами играют процессы неупругого (ионизационного) рассеяния. Авторы работы [55] утверждают, что поскольку количество высокоэнергетичных электронов в интеграле столкновений формально сохраняется, то требуется использовать более точную формулу для интеграла ионизационного рассеяния, нежели известную формулу Ландау [129] для неупругих столкновений быстрых электронов с атомами. Процесс рассеяния может быть описан интегралом типа (5.6), в котором функция распределения нейтральных молекул заменяется на некоторую функцию распределения электронов  $F_m \rightarrow F_e$ . Если принять, что быстрые электроны не соударяются между собой, то сечение в (5.6) должно состоять из трёх слагаемых. Первое  $q^{(1)}$  представляет собой сечение Резерфорда для описания рассеяния налетающего быстрого электрона, второе  $q^{(2)}$  описывает обменное взаимодействие между быстрым налетающим и медленным атомным электронами, а третье слагаемое  $q^{(3)}$  отвечает за генерацию новых быстрых электронов:

$$\begin{aligned} q(u, \theta) &= q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)}, \\ q^{(1)} &= \left( \frac{q^2}{mu^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}, \\ q^{(2)} &= \left( \frac{q^2}{mu^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta/2)}, \\ q^{(3)} &= \left( \frac{q^2}{mu^2} \right)^2 \frac{1}{\cos^4(\theta/2)}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где  $\theta$  представляет собой угол рассеяния.

В результате учёта всех вышеуказанных факторов, влияющих на динамику быстрых электронов, ионизационный интеграл можно представить в виде (5.6), где члены генерации  $q_+$  и гибели  $q_-$  частиц даются следующими суммами

$$q_+(u, \theta) = q^{(1)} - q^{(2)} + q^{(3)}, \quad q_-(u, \theta) = q^{(1)} - q^{(2)}. \tag{5.11}$$

### 5.3 Кинетическая теория быстрого разряда в коаксиальном диоде

Впервые полностью кинетический подход к моделированию газового разряда с убегаящими электронами был применён автором в работе [107], где рассматривался электрический разряд наносекундной длительности в среде азота атмосферного давления. Для осуществления корректного сопоставления кинетического моделирования с гибридным в указанной работе в качестве пространственно-одномерной модели разряда с неоднородной геометрией разрядного промежутка был также выбран коаксиальный газовый диод. Его параметры были следующими: давление газа  $P = 1$  атм, радиус внутреннего катода  $r_c = 1$  мм, радиус анодного цилиндра  $r_a = 10$  мм, продольная длина газоразрядной трубки  $L = 1$  см. На данный коаксиальный промежуток, включенный в последовательную электрическую цепь с источником напряжения и балластным сопротивлением  $R$ , подавался электрический импульс напряжения  $U_0(t)$  с крутым передним фронтом и амплитудой  $\sim 200$  кВ, существенно превышающей напряжение статического пробоя газа. Как отмечалось ранее, подобная эквивалентная схема электропитания диода хорошо моделирует используемую в большинстве экспериментов разрядку импульс-формирующей линии с волновым сопротивлением  $R = 75$  Ом на газовый диод. Длительность импульса питающего напряжения не превышала 1 нс по основанию.

Использование релятивистского варианта кинетического уравнения Больцмана (5.2) мотивировано тем, что напряжение, приложенное к сантиметровому зазору достигает сотни киловольт. В одномерном осесимметричном случае уравнение (5.2) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial r} + qE(r, t) \frac{\partial f}{\partial p} = (Q_+ - Q_- + S_t)/\gamma, \quad (5.12)$$

где  $(r, p)$  - координаты одномерного фазового пространства задачи.

Для точного электродинамического рассмотрения динамики плазмы быстрого газового разряда мы использовали систему уравнений Максвелла, которая в одномерном

случае без учёта внешнего магнитного поля имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} = q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{m\gamma} f dp - \frac{U_0(t) + \int_{r_c}^{r_a} E(r, t) dr}{2\pi r LR}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(rE(r, t))}{\partial r} = \frac{q}{\varepsilon_0} \left( n_i - \int_{-\infty}^{\infty} f dp \right), \end{array} \right. \quad (5.13)$$

где знаки в выражении для закона Ампера (5.13) выбраны в привязке к системе координат с направлением от катода к аноду, а именно при положительном анодном напряжении полный ток разряда и напряжённость поля в промежутке будут иметь отрицательные значения.

Полученная система интегро-дифференциальных уравнений (5.12)-(5.13), при условии её корректного численного решения, позволяет получать согласованное кинетическое описание переноса электронов в разрядном промежутке, соединённом с внешней электрической цепью. Непосредственно перед применением численных алгоритмов для решения системы уравнений Максвелла-Больцмана необходимо получить приемлемую формулировку интегралов столкновений в одном пространственном измерении. В рамках минимальной одномерной модели интегралы упругих и ионизационных процессов возможно значительно упростить.

Определяющую роль в формировании низкоэнергетической части электронного спектра играют упругие процессы рассеяния, которые в трёх пространственных измерениях формулируются в виде суммы двух членов разложения - (5.8) и (5.9). Анизотропная часть разложения общего интеграла столкновений (5.9) в одномерном случае преобразуется в выражение

$$S_t = N \frac{p}{m\gamma} \sigma_t(p) [f(r, p, t) - f(r, -p, t)], \quad (5.14)$$

которое представляет собой т.н. *приближение типа “вперёд-назад”*, часто применяемое в различных одномерных моделях [327]. Симметричный член разложения в виде слагаемого Фоккера-Планка (5.8) первоначально был сформулирован для трёхмерного случая. Аналогичное выражение для одномерного случая может быть получено после разложения общего выражения в ряды:

$$I_c(f_0) = N \frac{m}{M} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v \sigma_t(v) \left( f + \frac{kT}{mv} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right], \quad (5.15)$$

хотя вклад данного интеграла столкновений мал по сравнению с (5.14), который делает функцию распределений более изотропной в области низких энергий. В области очень

высоких энергий, сечение упругих процессов быстро спадает и становится намного меньше сечения ионизационных столкновений, что оставляет функцию распределения существенно анизотропной.

Вместо обобщённого представления интеграла ионизационных потерь, представленного выше, в данной модели мы будем использовать несколько более упрощённый подход. А именно предположим, что первичный электрон, имеющий кинетическую энергию  $\varepsilon$ , который соударяется с медленной атомной частицей, порождает в результате реакции два вторичных электрона: медленный с энергией  $\varepsilon_s(\varepsilon) = I \cdot \log(\varepsilon/I)$  и быстрый с энергией  $\varepsilon_f(\varepsilon) = \varepsilon - I(1 + \log(\varepsilon/I))$ . В обоих случаях  $I$  - это пороговое значение энергии реакции, примерно равное потенциалу ионизации нейтральной молекулы или атома.

По сравнению с (5.11), предложенный подход представляет собой значительное упрощение реального процесса ионизации нейтральных компонент газа быстрыми электронами, поскольку общее выражение предполагает, что существует некоторый вероятностный разброс энергий вторичных электронов. Тем не менее, введённое упрощение позволяет описать принципиально верно сам процесс перераспределения кинетической энергии налетающего электрона во всём диапазоне ионизационных столкновений. Кроме того, использованный подход значительно упрощает форму записи интегралов столкновений в (5.12).

Для получения указанные слагаемых сначала запишем слагаемое интеграла столкновений  $Q_-$ , которое отвечает за гибель электронов в элементе фазового объёма при ионизационном столкновении

$$Q_-(p) = N \frac{p}{m\gamma} \sigma_i(p) f(r, p, t), \quad (5.16)$$

где  $\sigma_i$  - сечение ионизации нейтральных частиц.

Поскольку нам известна частота ионизации для данной области энергий электронов, то частота актов рождения вторичных электронов будет точно такой же. А так как энергии первичных и вторичных электронов связаны полученными ранее зависимостями, то источники вторичных электронов можно пересчитать на основании слагаемого гибели первичных электронов, интерполируя выражение (5.16) при соответствующих новых значениях аргументов. Таким образом, слагаемое  $Q_+$ , представляющее собой источник

рождения двух вторичных электронов будет иметь вид  $Q_+ = Q_+^s + Q_+^f$ , где

$$Q_+^{s,f} = Q_- \left( mc \sqrt{\left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{s,f}(\varepsilon(p))}{mc^2} + 1 \right)^2 - 1} \right) \cdot \frac{d}{dp} \left[ mc \sqrt{\left( \frac{\tilde{\varepsilon}_{s,f}(\varepsilon(p))}{mc^2} + 1 \right)^2 - 1} \right], \quad (5.17)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{s,f}$  - обратные функции, численно соответствующие значениям энергий первичных электронов, которые порождают вторичные с данной энергией. Второй множитель в формуле (5.17) учитывает масштабное преобразование фазового объема при нелинейной замене переменных, обеспечивая постоянство числа актов гибели первичных электронов и соответствующих им актов рождения вторичных.

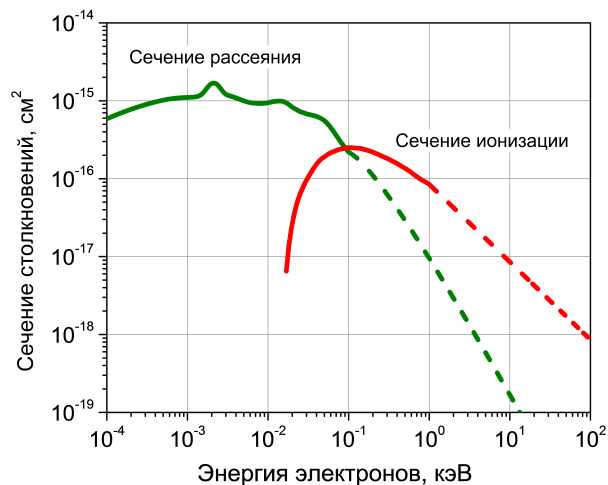


Рисунок 5.1 — Функции сечений упругих и ионизационных столкновений, используемые в расчётах в рамках полностью кинетической модели.

Данные об используемых сечениях (транспортном и ионизации) были взяты из работы [328], где они даны для значений энергий электрона до 1 кэВ. В области более высоких энергий была применена экстраполяция зависимости сечений с использованием асимптотических формул (Бете) [317]. Сводные графики сечений во всём диапазоне энергий налетающего электрона показаны на рисунке 5.1 (сплошные линии - данные из [328], штриховые - экстраполяция по формулам Бете).

Система уравнений кинетической модели решалась с начальными условиями, аналогичными широко используемым ранее в гибридной модели - нулевым электрическим полем и начальной функцией распределения, обеспечивающей концентрацию квазинейтральной плазмы на уровне не ниже  $10^3 \text{ см}^{-3}$ . В примере, приведённом ниже, начальная функция распределения дополнительно выбиралась пространственно-неоднородной.



Она соответствовала распределению концентрации  $n_e(r, t = 0) = n_0 \exp(-20r^2/r_a^2)$ , где  $n_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ . Для того чтобы избежать описания несущественных в “минимальной” модели эмиссионных процессов с катода, мы пренебрегали падением напряжения на прикатодном слое и использовали нулевые граничные условия Неймана для функции распределения на катоде  $(\partial f / \partial r)_c = 0$ .

В качестве метода численного решения уравнений модели в работе [107], а также последующих работах [110, 111] была использована численная схема (2.83), (2.85). В расчётах использовалось сеточное разбиение фазового пространства, которое имело 1536 узлов по координате  $r$  и 6144 узлов по переменной импульса  $p$ . Временной шаг схемы варьировался в широких пределах - 0.005 – 1 пс для достижения приемлемого уровня относительной ошибки временного решателя. Для верификации достоверности получаемых численных данных дополнительно применялись методы, более подробно описанные в Главе 2.

На рисунке 5.2 показаны рассчитанные временные зависимости напряжения на источнике и на диоде, а также зависимость импульса тока пучка быстрых электронов за анодной фольгой. Из-за быстрого развития пробоя и наличия большого балластного сопротивления напряжение на диоде не увеличивается выше 110 кВ, а на завершающей фазе пробоя оно выходит на уровень, соответствующий напряжённости электрического поля  $\sim 20 \text{ кВ/см}$ , которая типична для объёмных разрядов атмосферного давления в чистом азоте [97]. Это подтверждает, что предложенная кинетическая модель даёт реалистичное значение удельной проводимости низкотемпературной азотной плазмы.

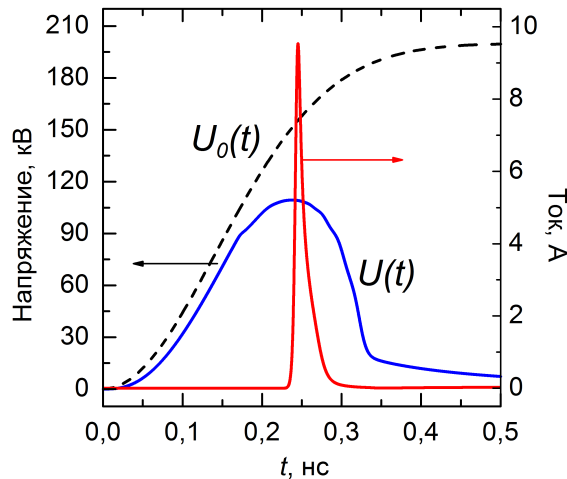


Рисунок 5.2 — Временные зависимости напряжения источника  $U_0(t)$ , напряжение на диоде  $U(t)$  и тока пучка быстрых электронов за алюминиевой фольгой толщиной 10 мкм.

Импульс тока пучка быстрых электронов на рисунке 5.2 появляется вблизи максимума падения напряжения на диоде и имеет длительность порядка 60 пс по основанию. Макроскопические характеристики, приведённые на рисунке 5.2, находятся в хорошем согласии с аналогичными результатами гибридного моделирования, приведёнными в Главе 4. Вместе с тем, полностью кинетическая модель предоставляет наиболее полную информацию об эволюции разрядного явления благодаря тому, что все электроны разряда описываются в терминах одной функции распределения.

На рисунке 5.3 показаны денситограммы (фазовые портреты) мгновенной функции распределения электронов в фазовом пространстве для четырёх различных моментов времени. Денситограммы показывают место, где начинает формироваться поток убегающих электронов и его динамику на протяжении всего интервала времени рассмотрения. Упругие столкновения (рассеяния “вперёд-назад”) формируют характерную форму функции распределения с быстрыми электронами, летящими в направлении, противоположном движению волны ионизации. Начальная стадия формирования разряда, при которой электроны ещё не достигают анода, но фронт ионизации уже отошёл от катода на расстояние  $\sim 0.6$  мм, показана на рисунке 5.3 (а). Здесь напряжённость электрического поля достигает максимальных величин  $\sim 300$  кВ/см непосредственно вблизи фронта волны ионизации. Убегающие электроны значительно опережают движение фронта волны ионизации, имея кинетическую энергию меньше той, которую они могли бы набрать, пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U(t)$ . Общий характер динамики основных (плазменных) компонент разряда полностью совпадает с гидродинамическим описанием (см. Главу 3) как по характеру распределений электронов и ионов в теле волны ионизации и на её фронте, так и по скорости движения фронта ионизации. Средние энергии в зарождающемся пучке убегающих электронов равны  $\sim 100$  кэВ.

Далее, на рисунке 5.3 (б) показывается, что поток убегающих электронов достиг анода, в то время как промежуток заполнился плотной плазмой менее, чем на половину, т.е. длина тела волны ионизации составляет  $\sim 3$  мм. Видно, что электроны, поступающие на анод в данный момент времени имеют средние энергии, превышающие значение  $qU(t)$ , т.е. являются электронами с “аномальными” кинетическими энергиями. Уже к моменту времени 200 пс в середине промежутка появляются убегающие электроны с энергией порядка  $\sim 100$  кэВ (случай (а)), а то время, за которое они проходят остаток пути до анода, напряжённость поля в этой области вырастает почти в два раза, несмотря на то, что падение напряжения на аноде за это время выросло всего на 10 кВ. В результате чего электроны приносят на анод энергию большую, чем они способны приобрести в стационарном поле при той же разности потенциалов. Средняя энергия быстрых

электронов пучка здесь превышает мгновенное значение приложенного напряжения (умноженного на заряд электрона), а именно составляет  $\sim 108$  кэВ.

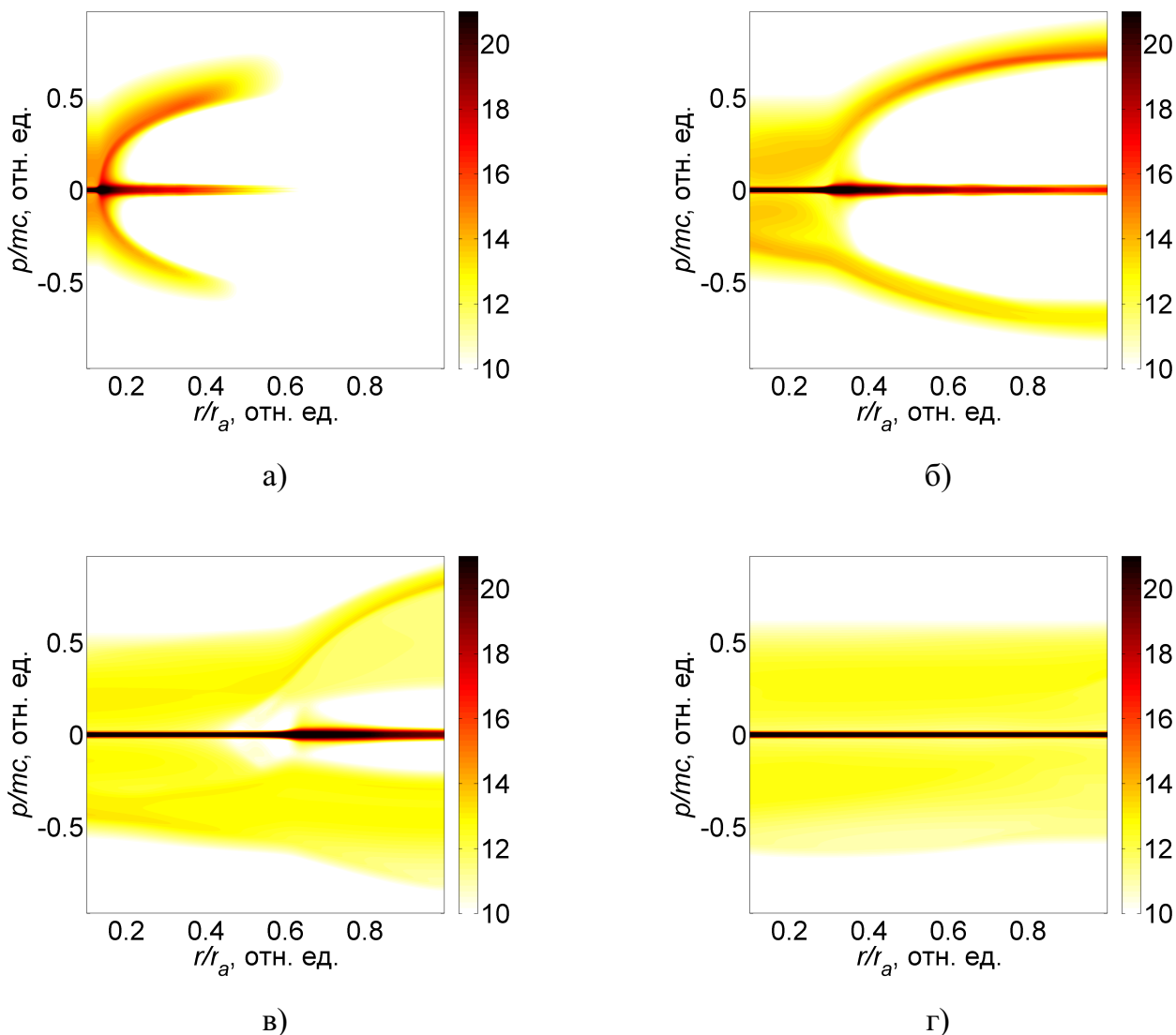


Рисунок 5.3 — Денситограммы мгновенных функций распределения убегающих электронов в десятичном логарифмическом масштабе, соответствующие следующим моментам времени: а) 200 пс; б) 250 пс; в) 300 пс; г) 350 пс.

Рисунок 5.3 (в) иллюстрирует дальнейшую эволюцию разряда, когда происходит быстрый спад напряжения на диоде и фронт волны ионизации приближается к аноду. На данной стадии новые источники убегающих электронов уже не появляются, а на анод идут быстрые электроны, сгенерированные ранее. Хотя напряжённость поля вблизи анода всё ещё сравнительно велика (рисунок 5.4), её недостаточно для перехода “медленных” (плазменных) электронов в режим непрерывного ускорения. Средняя энергия быстрых электронов пучка на данном этапе превышает  $\sim 80$  кэВ. Стадия коммутации промежутка, когда плотная плазма заполняет газовый диод полностью

показана на 5.3 (г), где почти весь ток переносят “медленные” электроны плазмы столба, и очень немногочисленные быстрые электроны практически изотропно рассеяны по всем направлениям.

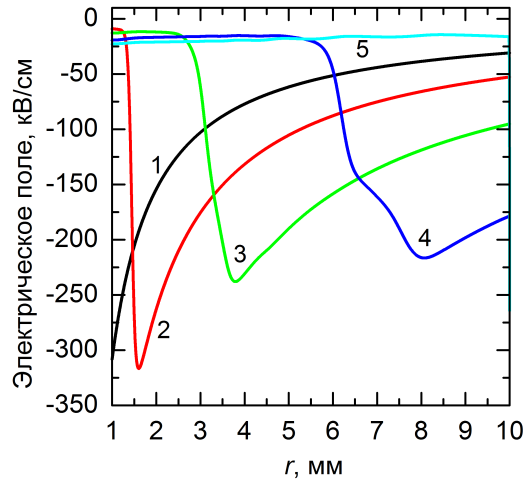


Рисунок 5.4 — Пространственные распределения напряжённости электрического поля в различные моменты времени: 1 - 150 пс, 2 - 200 пс, 3 - 250 пс, 4 - 300 пс, 5 - 350 пс.

Как и в Главе 4, для сравнения с экспериментом, основной интерес представляет не распределение электронов в объёме промежутка, а их ток  $i_{\text{run}}$  и энергетический спектр за анодом из фольги  $f_{\text{foil}}$ . Кинетическая модель позволяет получить эти параметры детально, используя формулу для трансформации спектра после прохождения тонких фольг толщиной  $d_i$  для полной функции электронов

$$f_{\text{foil}}(\varepsilon) = \tau(\varepsilon(v(p)), d_i) f(r = r_a, p, t),$$

$$i_{\text{run}} = q \int_0^{p(\varepsilon_{\text{max}})} v(p) f_{\text{foil}} dp. \quad (5.18)$$

На рисунке 5.5 показаны функции мгновенного спектра быстрых электронов и их полный (интегральный) спектр за всё время рассмотрение разряда в логарифмическом масштабе. Спектральное распределение по ансамблю электронов (рисунок 5.5) можно условно разделить на низкоэнергетичную (плазменную) часть и высокоэнергетичную (пучок убегающих электронов). По характеру трансформации полного спектра можно видеть процесс разогрева электронов. Несмотря на значительную трансформацию распределений концентраций частиц, которые происходят при формировании волны ионизации, модель позволяет рассчитывать полный спектр электронов в любой необходимый момент времени.

Наконец, по формуле (4.11) можно посчитать интегральный спектр быстрых электронов, прошедших фильтр из алюминиевой фольги толщиной 10 мкм. Результат интегрирования совокупности мгновенных спектров по формуле (4.11) показан на рисунке 5.6. Общее число убегающих электронов в импульсе примерно равно  $\sim 9 \cdot 10^8$ , что хорошо согласуется с наблюдаемым количеством быстрых электронов в экспериментах с близкими параметрами, например, из работы [324]. Следует отметить, что практически весь диапазон энергий электронов пучка находится в области “аномальных” энергий. Столь значительный ансамбль электронов с “аномальной” средней энергией специфичен только для рассматриваемой модели цилиндрической геометрии разрядного промежутка. В реальных экспериментах конфигурация газоразрядного промежутка всегда имеет трёхмерную геометрию. В таких случаях площадь поверхности фронта волны ионизации существенно меньше модельного значения. Это приводит к тому, что только часть электронов, генерируемых непосредственно в области фронта испытывает воздействие механизма поляризационного ускорения. В то время как в модельной осесимметричной задаче такое воздействие оказывается на все вновь появляющиеся в области сильного поля вторичные электроны.

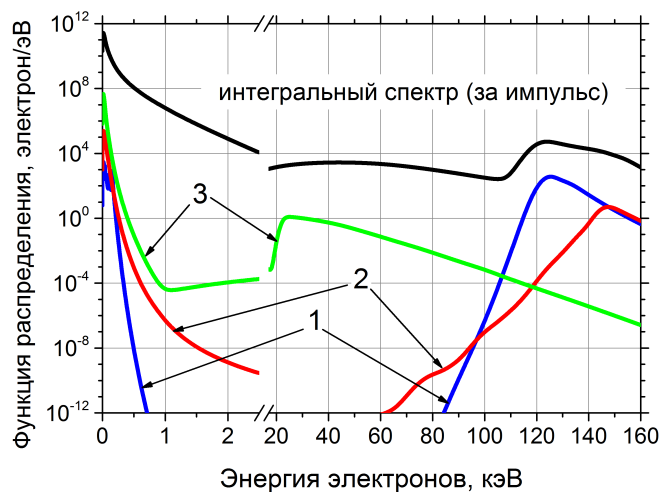


Рисунок 5.5 — Спектры падающих на анод электронов в моменты времени: 1 - 250 пс, 2 - 300 пс, 3 - 350 пс и суммарный (интегральный) спектр.

Работа [111] посвящена продолжению исследований возможностей полностью кинетических моделей. В этой работе сравниваются результаты моделирования явления развития азимутально-однородного пробоя в коаксиальном газовом диоде в условиях генерации в нем убегающих электронов в гибридной модели и полностью кинетической модели. Геометрические и электрофизические параметры моделей совпадали с изложенными выше для азота. В объёме коаксиального диода задавалась предварительная

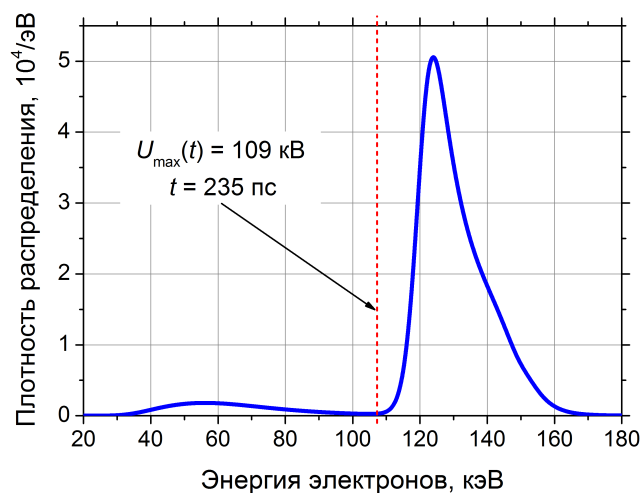


Рисунок 5.6 — Интегральный спектр быстрых электронов за анодной фольгой толщиной 10 мкм.

пространственная резко-неоднородная предыонизация газа, которая, как и в расчётах выше, описывалась формулой  $n_e(r, t = 0) = n_0 \exp(-20r^2/r_a^2)$ , где  $n_0 = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$ . Нами намеренно был взят для модельного расчёта случай сильно-неоднородной предыонизации, для того чтобы продемонстрировать работоспособность гидродинамической составляющей гибридной модели в случае, когда учёт ионизации газа убегающими электронами невозможен. В гидродинамическом описании использовалась модель быстрого разряда (см. Главу 3), в которой зависимости скорости дрейфа электронов и коэффициента Таунсенда от локальной напряжённости электрического поля брались в виде наиболее простых зависимостей из [131]. Они схематически изображены на следующем рисунке 5.7.

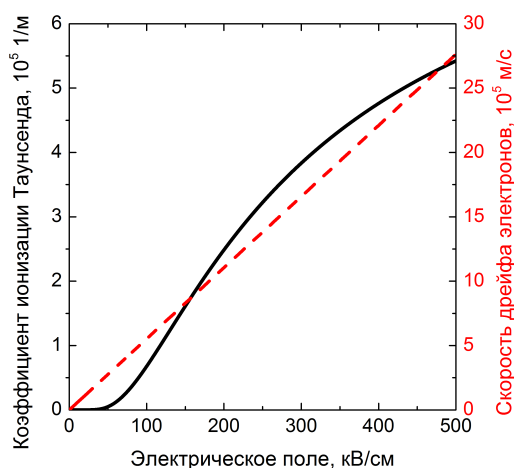


Рисунок 5.7 — Используемые в расчётах полуэмпирические зависимости коэффициента ионизации Таунсенда и скорости дрейфа электронов от напряжённости электрического поля.

Сравнение результатов полностью кинетического и гибридного кинетического моделирования производилось для следующих параметров газового диода:  $r_c = 1$  мм,  $r_a = 11$  мм,  $L = 1$  см,  $P = 1$  атм. От источника напряжения через балластное сопротивление  $R = 75$  Ом подавался сглаженный импульс амплитудой 200 кВ с передним фронтом  $\sim 200$  пс (по уровню 0.1 – 0.9).

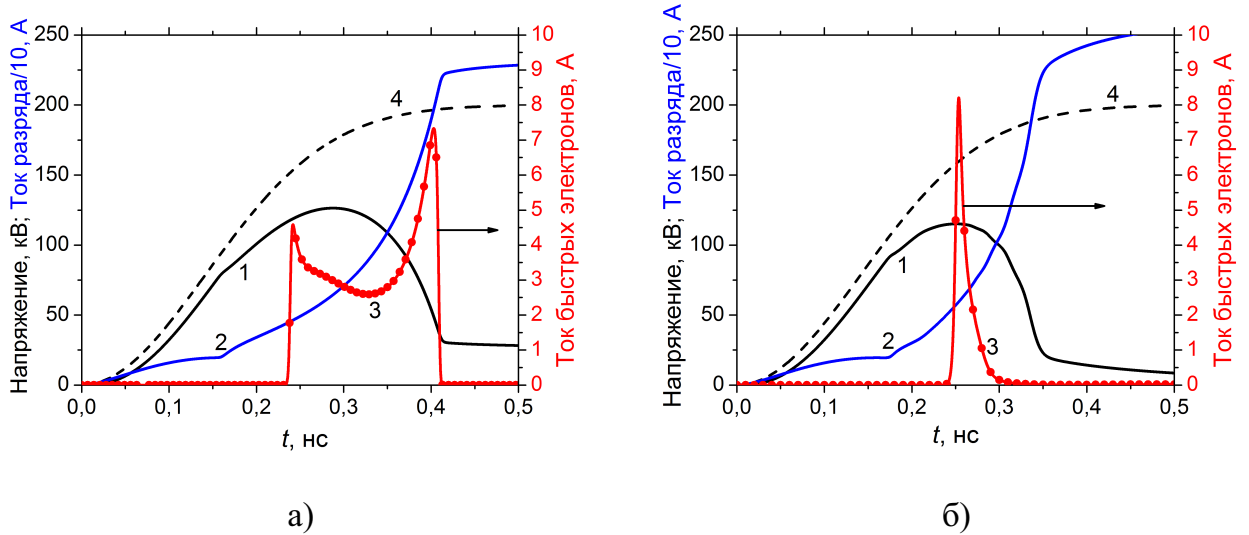


Рисунок 5.8 — Сравнение временных профилей распределения: 1 - падения напряжения  $U(t)$  на диоде, 2 - тока в цепи разряда, 3 - тока пучка быстрых электронов за алюминиевой фольгой 10 мкм, полученных для гибридного а) и полностью кинетического б) методов моделирования. Кривая 4 - напряжение на источнике питания  $U_0(t)$ .

На рисунке 5.8 показаны сравнительные расчётные зависимости напряжения источника и падения напряжения на диоде, а также импульсов тока быстрых электронов за анодной фольгой для двух рассматриваемых подходов теоретического моделирования. Очевидно, временные профили напряжения и тока разряда в обоих случаях описания схожи, несмотря на то, что гидродинамическое описание в гибридной модели даёт несколько замедленное по сравнению с кинетической моделью развитие разряда. Это выражается в более позднем времени достижения максимального значения напряжения (290 пс и 250 пс, соответственно), а также в затянутом времени запаздывания стадии сильноточной коммутации тока в гибридной модели (415 пс и 350 пс, соответственно). Также следует отметить отличия по параметрам квазистационарного уровня напряжения на промежутке в стадии коммутации тока: в гибридной модели напряжение несколько выше  $\sim 27$  кВ. Плато коммутационной стадии на профиле напряжения выражено отчётливее в гибридной, нежели в полной кинетической модели.

Результаты вычисления импульса тока быстрых электронов в обеих моделях имеют существенные различия. Амплитудные значения импульсов вполне сопоставимы, но

формы профилей кардинально различаются: в гибридной кинетической модели импульс имеет два ярко выраженных максимума и большую протяжённость, а в полностью кинетической модели импульс тока пучка имеет единственный максимум с длительностью на полувысоте всего 15 пс. В этом случае полное число быстрых электронов в импульсе тока пучка равно  $\sim 10^9$ , что хорошо согласуется с экспериментальными данными [22,23] как по числу электронов в импульсе, так и по оцениваемой длительности импульса тока. Результаты расчётов убегающих электронов в рамках гибридной модели явно противоречат им.

Для выяснения причин установленных различий следует обратиться к пространственно-временной картине распределения плазмы разряда в диоде. Пространственные профили напряжённости электрического поля на рисунке 5.9, вычисленные в различные моменты времени, наиболее подробно показывают динамику развития разряда. На протяжении всех стадий формирования и эволюции газового разряда профили напряжённости имеют вид немонотонных зависимостей от радиальной координаты, причем максимум значения поля перемещается от катода к аноду с переменной скоростью. Экстремум напряжённости поля расположен на фронте волны ионизации, плотная плазма которой генерируется благодаря интенсивной ударной ионизации газа, постепенно заполняя весь промежуток, в основной части которого практически нет электронов ввиду неоднородной начальной ионизации.

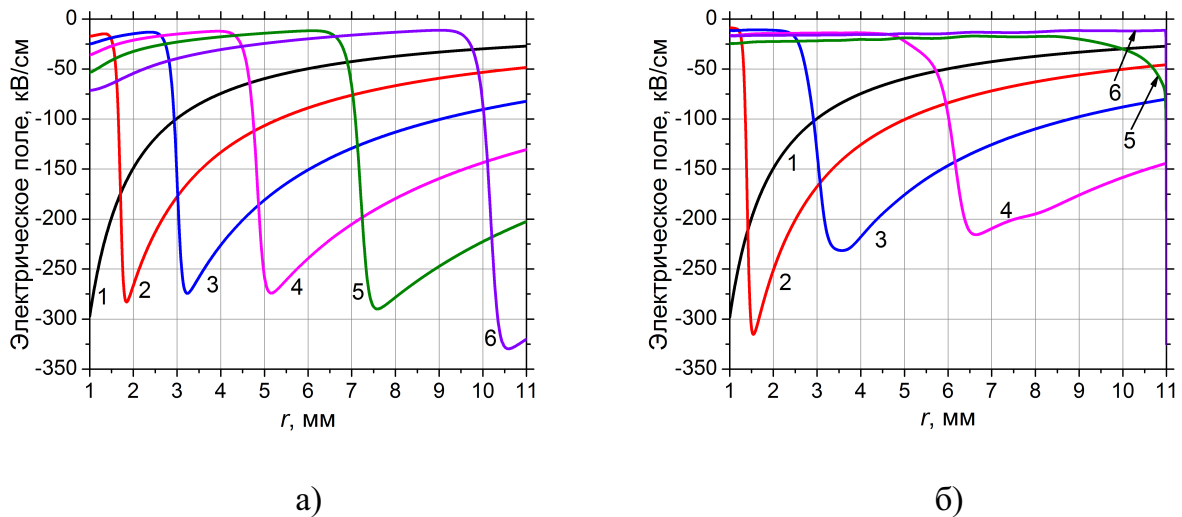


Рисунок 5.9 — Пространственные распределения радиальной компоненты напряжённости электрического поля в моменты времени: 1 - 150 пс, 2 - 200 пс, 3 - 250 пс, 4 - 300 пс, 5 - 350 пс, 6 - 400 пс, полученные в гибридном а) и полностью кинетическом б) методах моделирования.

В рамках гибридной кинетической модели, в области за фронтом волны ионизации активной генерации плазмы практически не происходит, поэтому напряжённость



электрического поля по мере продвижения фронта всё в более значительной мере вытесняется к аноду из области, заполненной плотной плазмой. В данном случае ток разряда в неионизованной части промежутка замыкается в основном за счёт тока смещения, что видно на рисунке 5.8 (а). Наличие сильного электрического поля в области фронта волны ионизации обеспечивает режим убегания электронов, более того - ещё больше стимулирует режим убегания по мере приближения фронта ионизации к аноду, чем и объясняется существование второго максимума тока пучка, а также бóльшая временная протяжённость импульса тока, построенного на рисунке 5.8 (а). Из-за того, что в рамках полностью кинетической модели разряда ионизация газа убегающими электронами учитывается согласованно, плазма разряда генерируется непрерывно во всём газоразрядном промежутке. Максимум электрического поля за фронтом волны ионизации постепенно спадает, а пучок быстрых электронов за фольгой, основная часть которого сгенерирована в прикатодной области вначале пробоя, имеет один максимум и короткую длительность, как видно на рисунке 5.8 (б).

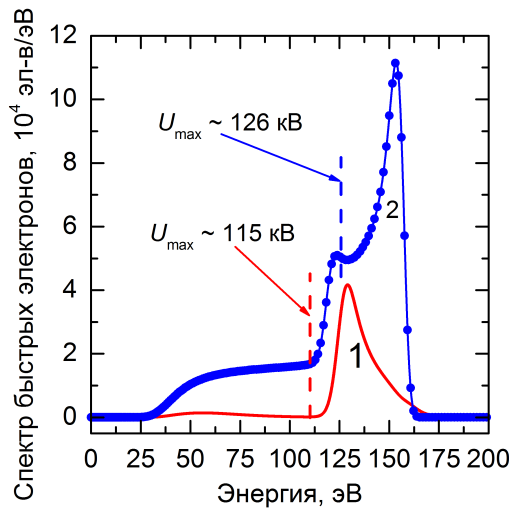


Рисунок 5.10 — Интегральные спектры быстрых электронов за анодной фольгой толщиной 10 мкм в двух моделях разряда: 1 - кинетической и 2 - гибридной.

Исходя из того, что оба теоретических подхода дают различную временную эволюцию пространственной структуры разряда, интегральные энергетические спектры пучка быстрых электронов также будут разными. Сравнительные спектральные распределения приведены на рисунке 5.10. Примечательно, что в обеих теоретических моделях спектры содержат убегающие электроны с т.н. “аномально” высокой энергией. Но если для полноценного кинетического расчёта практически все быстрые электроны имеют такие энергии, то в гибридном моделировании доля “аномально” быстрых электронов составляет примерно половину числа всех электронов в пучке. Исходя из сравнительного анализа пространственно-временной эволюции основной (плазменной)

составляющей разряда можно сделать вывод, что главной причиной различия в результатах расчётов параметров убегающих электронов является отсутствие электронной проводимости промежутка между фронтом волны ионизации и анодом (в гибридной модели при неоднородной предыонизации). Кардинальные расхождения между моделями во многом исчезают, если при постановке начальных условий задачи обеспечить равномерную объёмную предварительную ионизацию газа. При этом даже в рамках гибридной модели импульс тока пучка быстрых электронов за фольгой имеет один максимум и амплитуду, близкую по значению в полностью кинетической модели [108].

К сожалению, уровень временного разрешения современных запоминающих цифровых осциллографов реального времени не позволяет уверенно подтвердить большую достоверность результатов, которую, по мнению автора диссертации, даёт полностью кинетическая теория. В значительной степени можно утверждать, что результаты гибридной кинетической и полностью кинетической теорий хорошо согласуются для временных масштабов длительности тока пучка порядка  $\sim 60 - 100$  пс при средней погрешности измерения амплитуды монополярного импульса тока на уровне  $\sim 10 - 20$  % [80].

Отметим, что возможности чисто кинетического моделирования практически полностью ограничены одномерными задачами. Так, для численного решения кинетического уравнения в одномерно-осесимметричном случае необходимо задать сеточное разбиение фазового пространства, состоящее из  $1536 \times 6144$  элементов, которое требует всего около 72 мегабайт оперативной памяти [111]. Однако рассмотрение подобной двумерной задачи с аналогичным разрешением на сетке  $1536 \times 1536 \times 6144 \times 6144$  потребует свыше 600 терабайт оперативной памяти, что делает расчёт неосуществимым даже на современных высокопроизводительных кластерах с распределёнными вычислительными ресурсами. В свете этой проблемы одним из преимуществ гибридного моделирования является возможность комбинирования двумерных и даже трёхмерных расчётов динамики “медленных” частиц (плазмы газового разряда в рамках гидродинамического моделирования) с последующим вычислением функции распределения убегающих электронов путём решения одномерного кинетического уравнения. Это особенно актуально, учитывая, что подавляющее большинство исследуемых экспериментальных конфигураций газовых диодов [80] являются осесимметричными, например, представляют собой систему острие-плоскость или шар-плоскость. В них поток убегающих электронов формируется на оси симметрии задачи и имеет малые углы отклонения от направления движения вдоль оси.

## 5.4 О физической природе убегающих электронов, имеющих “аномальные” энергии

О том, что в энергетическом спектре быстрых электронов за фольгой содержится небольшая (менее 10 %) доля электронов с энергиями, превышающими произведение максимума приложенного напряжения на заряд электрона  $\varepsilon > qU_{\max}$ , было известно достаточно давно, начиная с первых экспериментальных работ по исследованию рентгеновского излучения, генерируемого вакуумным диодом. Так, в работе [225] было установлено, что при подаче на вакуумный диод импульсного напряжения с амплитудой  $U_{\max}$  генерируются кванты рентгеновского излучения с энергиями, превышающими  $qU_{\max}$  более чем в два раза. Аналогичные экспериментальные исследования проводились и в газонаполненных диодах, как, например, в работе [142]. Зачастую полученные результаты измерений трактовались как ошибочные, поэтому для данной группы электронов был введён условный термин: электроны с “аномальными” энергиями. Их появление связывали с несовершенством экспериментальной методики измерения энергетических спектров, недостаточным временным разрешением осциллографов, а также со значительными потерями при транспортировке пучков в системах магнитных и времяпролётных спектрометров.

Однако в настоящее время, благодаря разработанной автором данной диссертационной работы методике восстановления энергетических спектров (см. Главу 2), вопрос о достоверности полученного спектра в значительной степени решён. Результаты восстановления спектра быстрых электронов в газовых и вакуумных диодах выполнялись по данным кривых ослабления и хорошо коррелировали с результатами времяпролётной спектрометрии [98]. Тем не менее, среди критических замечаний относительно возможности появления электронов с “аномальными” энергиями часто высказывается следующий аргумент: в проводимом физическом эксперименте говорить о конкретном значении максимума напряжения, приложенного к диоду, достаточно трудно [23].

Может показаться, что после того как в работах [97, 102, 103, 107, 111] были проведены теоретические исследования быстрых разрядов атмосферного давления с использованием методов физической кинетики, стало очевидно, что наличие в спектре пучка быстрых электронов с т.н. “аномальной” энергетической компонентой не является следствием неправильной измерительной методики и не связано с использованием ошибочных приближений. Однако на сегодняшний день нельзя не отметить отсутствие определённого понимания данного вопроса в широких научных и инженерных кругах. Это связано с тем, что на уровне элементарной теории объяснение природы “аномальных” энергий

не давалось, а результаты кинетической теории дают комплексное количественное описание данного процесса.

В данном разделе приводится подробное рассмотрение возможности ускорения одиночных электронов до “аномальных” значений энергий в рамках элементарной теории. Рассматриваемые электроны при этом находятся в условиях, приближенных к тем, которые возникают в плазме газового разряда. Предложенная элементарная теория была впервые сформулирована автором диссертационной работы совместно с А.В. Козыревым в работе [110].

Рассмотрим одномерную модель взаимодействия покоящегося электрона с зарядом  $q$  и электрического поля, имеющего вид бегущей волны  $E(x - ut)$ , где  $x$  - пространственная координата,  $t$  - время. Для простоты будем полагать, что профиль электрического поля имеет постоянную форму в пространстве, представляющую прямоугольник с высотой  $E_0$  и основанием  $L$ , который изображён схематически на рисунке 5.11 (а). Бегущая волна электрического поля движется слева направо с постоянной скоростью  $u$  и, в некоторый момент времени, взаимодействует с покоящимся электроном. Электрон начинает ускоряться в тот момент, когда оказывается в области действия поля. На рисунке 5.11 (б) область взаимодействия изображена в виде цветной фигуры, построенной в осях  $(x, t)$ .

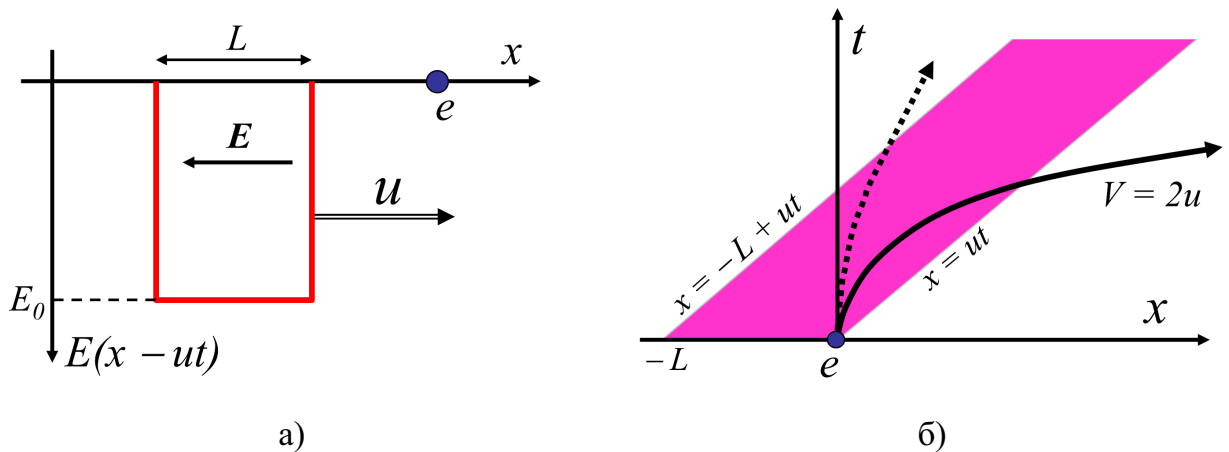


Рисунок 5.11 — Схематическое изображение постановки задачи о воздействии электрического поля в форме бегущей волны на покоящийся электрон а) и схематическое изображение двух видов данного взаимодействия б). Сплошная линия соответствует режиму отражения, пунктирная - режиму прохождения.

Для простоты рассмотрим сначала нерелятивистский случай движения профиля поля  $u \ll c$ , где  $c$  - скорость света в вакууме. Итак, попав внутрь области действия электрического поля, электрон будет двигаться равноускоренным образом, проходя за

некоторое время  $t$  расстояние

$$x(t) = \frac{qE_0}{2m}t^2. \quad (5.19)$$

Как показано на рисунке 5.11 (б), существует два асимптотических сценария данного взаимодействия.

Если в результате взаимодействия поля и электрона задний фронт бегущей волны опередит электрон, то последний приобретёт скорость, меньшую  $u$  и останется позади бегущей волны. Такой режим условно назван “режимом прохождения”. Другими словами, решение уравнения  $x(t) = -L + ut$  будет иметь вещественный корень. Из условия положительно определённого дискриминанта квадратного уравнения можно получить следующее неравенство

$$\frac{mu^2}{2} > qE_0L. \quad (5.20)$$

Оно выполняется при таком падении напряжения  $U_0 = E_0L$ , при котором потенциальная энергия  $qU_0$  меньше кинетической энергии электрона в системе покоя профиля поля, т.е.  $mu^2/2$ .

Для понимания эффекта, приводящего к образованию в разрядах некоторой доли электронов с “аномальными” энергиями, важен второй режим, который условно называется “режимом отражения”. В нём электрон испытывает ускоряющее воздействие поля так, что приобретает скорость, бóльшую  $u$  и выходит из области действия поля, опережая бегущую волну. В подвижной системе отчёта электрон отражается от потенциального барьера, которым является профиль электрического поля. В этом случае мы получаем уравнение  $x(t) = ut_0$ , откуда можно получить скорость электрона, которую он может приобрести -  $V = (qE_0/m)t_0 = 2u$ . Используя выражение для кинетической энергии электрона и условие отражения

$$\varepsilon = \frac{mV^2}{2} = 2mu^2, \quad \frac{mu^2}{2} < qU_0, \quad (5.21)$$

можно записать неравенство, ограничивающее максимум значения кинетической энергии электрона

$$\varepsilon = 2mu^2 = 4\frac{mu^2}{2} \leq 4qU_0, \quad (5.22)$$

которое показывает, что электрон может набирать энергию вплоть до значений  $\sim 4qU_0$ .

Если профиль электрического поля  $E(x)$  в виде бегущей волны имеет произвольную форму, при этом оставаясь однопиковой знакопостоянной функцией, то можно обобщить приведённые выше результаты и для такого случая движения электрона. Падение напряжения будет выражаться следующим интегралом от функции поля  $U_0 = \int_{-\infty}^{\infty} E(x)dx$ ,

а конечная энергия электрона после взаимодействия с электрическим полем может быть наглядно представлена в виде схематической диаграммы

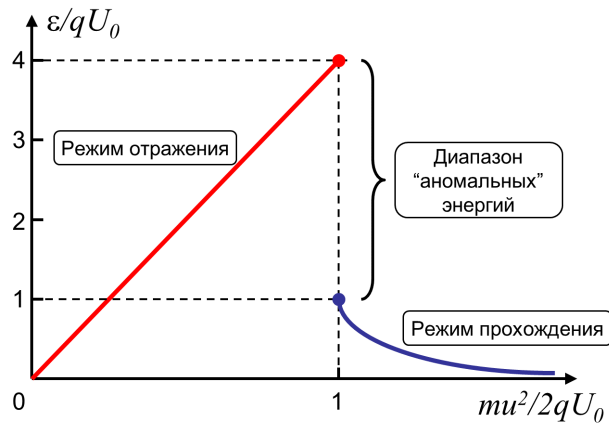


Рисунок 5.12 — Зависимость конечной скорости движения электрона после взаимодействия с электрическим полем в виде бегущей волны от скорости движения профиля поля (нерелятивистский случай).

Для случая релятивистских скоростей, после перехода в систему отсчёта, связанную с бегущей волной, для режима отражения (5.21) мы получаем аналогичное условие

$$\frac{mc^2(\gamma - 1)}{2} < qU_0, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (5.23)$$

Скорость отражённого электрона  $V$  в подвижной системе отсчёта согласно правилу сложения скоростей будет определяться как  $V = \frac{2u}{1+u^2/c^2}$ , а его кинетическая энергия -  $\varepsilon = mc^2 \cdot 2(\gamma^2 - 1)$ . В нерелятивистском пределе  $qU_0 \ll mc^2$  максимальная кинетическая энергия будет определяться ранее полученным выражением (5.22). Ультрарелятивистский случай -  $qU_0 \gg mc^2$ ,  $\gamma \gg 1$  - даёт следующую оценку

$$\varepsilon \leq 2\gamma \cdot qU_0, \quad (5.24)$$

которая показывает принципиальную возможность ускорения электронов до кинетических энергий, многократно превосходящих падение напряжения на промежутке (умноженное на заряд электрона).

Так как представленный выше теоретический вывод можно распространить на любую форму профиля бегущей волны электрического поля, то можно оценить влияние ускорения и в том случае, когда форма профиля поля и его скорость меняются в процессе движения. Именно такую ситуацию мы чаще всего имеем, когда рассматриваем наносекундный разряд с высоким уровнем перенапряжения промежутка по отношению к значению статического напряжения пробоя. В этих условиях (см. рисунок 5.4),

электрическое поле представляет собой решение типа бегущей волны с переменной амплитудой. Оно взаимодействует со вторичными электронами разряда, в результате чего часть электронов может приобретать т.н. “аномальные” энергии. Известно, что наличие ионизационных и упругих рассеивающих столкновений в значительной степени препятствует переходу бóльшей части плазменных электронов в режим убегания. Также можно утверждать, что столкновения существенно снижают и количество убегающих электронов с “аномальными” энергиями, поэтому при атмосферных давлениях доля таких электронов мала по сравнению с общим количеством [80].

## 5.5 Выводы

- В данной главе подробно сформулирована полностью кинетическая модель быстрого (наносекундного) газового разряда высокого давления, генерирующего потоки убегающих электронов. Построенный теоретический подход успешно применён к рассмотрению одномерной осесимметричной задачи о развитии разряда в газовой диоде коаксиальной геометрии заполненного азотом атмосферного давления. Полученное описание является исчерпывающим и самосогласованным как для моделирования формирования потока убегающих электронов, так и для описания влияния этого потока на параметры ионизации газа. В качестве основного результата были рассчитаны полные энергетические спектры электронной компоненты плазмы разряда. В том числе, были вычислены основные параметры импульса тока быстрых электронов, которые хорошо коррелируют с известными экспериментальными данными. Среди наиболее важных достоинств кинетической модели разряда стоит отметить отсутствие каких-либо полумпирических коэффициентов и функциональных зависимостей, характеризующих понятие т.н. “критического поля”, а также коэффициенты усиления поля, скорости дрейфа и пр.;
- Проведено подробное сравнение результатов теоретического моделирования импульсного наносекундного разряда в азоте в рамках двух различных подходов, предложенных в данной диссертационной работе для описания динамики электронной компоненты плазмы разряда: гибридного и полностью кинетического. Было показано, что оба теоретических подхода вполне применимы для расчётов коммутационных характеристик высоковольтного пробоя газа. В исследуемых случаях они дают примерно одинаковые количественные характеристики процесса. Если предварительная ионизация газа в промежутке является пространственно однородной, то обе модели дают близкие результаты и для параметров пучков убегающих электронов. Однако, если предварительная ионизация газа в диоде имеет неоднородный профиль, то только последовательный

кинетический подход позволяет правильно рассчитать основные параметры импульса тока быстрых электронов, в то время как гибридный метод даёт менее аккуратную оценку параметров данного явления;

- Для наглядного объяснения явления формирования т.н. “аномальной” энергетической составляющей спектра быстрых электронов, была предложена элементарная теория, которая показывает физическую причину ускорения одиночных электронов до кинетических энергий, превосходящих максимум напряжения на промежутке (умноженного на элементарный заряд). Применительно к экспериментальным условиям трёхмерной геометрии доля “аномально ускоренных электронов” должна кратно снижаться по сравнению с одномерными модельными расчётами. Предложенное объяснение находится в строгом соответствии с полностью кинетической теорией, в рамках которой пучок убегających электронов всегда содержит электроны с энергиями, превышающими мгновенное значение  $qU(t)$  на промежутке;

- Полностью кинетическая одномерная модель позволяет рассматривать разряды в широком диапазоне рабочих давлений, открывая большие перспективы для изучения физической кинетики гигантских протяжённых стратосферных разрядных явлений типа “блю джетов” и “спрайтов” даже в одномерной пространственной постановке (например, [75]).



# Заключение

Основные результаты диссертационной работы обобщаются в виде следующих выводов:

1. Предложена и реализована (в виде прикладной программы на языках высокого уровня) самосогласованная математическая методика восстановления спектров быстрых электронов по дискретному набору экспериментальных данных кривой ослабления пучка в металлических фольгах различной толщины путём численного решения некорректно поставленной задачи для соответствующего уравнения Фредгольма первого рода;
2. С помощью предложенной методики впервые были восстановлены энергетические спектральные распределения пучков быстрых электронов за анодом из фольги для газонаполненных и вакуумных диодов различной конструкции без каких-либо априорных предположений о форме и ширине исследуемых спектров;
3. В рамках единого подхода построения теоретических моделей и сопряжённого с ним подхода к решению получающихся дифференциальных уравнений переноса заряженных частиц, совмещённых с уравнениями эволюции электромагнитного поля, была успешно смоделирована работа активной области полупроводникового диода Ганна в цепи наносекундного генератора сверхвысокочастотных колебаний, а также были изучены нестационарные структуры классического тлеющего разряда и наносекундного газового разряда высокого давления в азоте и гексафториде серы;
4. Благодаря систематизированному применению численных методов для решения кинетического бесстолкновительного уравнения (Власова) совместно с уравнением Пуассона для электрического поля, были впервые решены две классические задачи вакуумной электроники: задача о релаксации объёмного заряда в диоде Чайлда-Ленгмюра и задача об инжекции электронного пучка в эквипотенциальный одномерный межэлектродный промежуток. Новизна данного подхода обусловлена тем, что принципы физической кинетики впервые задействованы для рассмотрения задач, в которых столь фундаментальный подход ранее считался избыточным;

5. Впервые предложен гибридный теоретический подход для описания динамики электрических разрядов высокого давления наносекундной длительности, который основан на сочетании гидродинамического моделирования эволюции разрядной плазмы с кинетическим описанием динамики убегающих электронов;
6. Благодаря использованию гибридного кинетического подхода впервые была рассчитана динамика наносекундного газового разряда высокого давления в различных одномерных конфигурациях разрядного промежутка. Предложенная методология позволила получить коммутационные характеристики исследуемых диодов, пространственно-временные профили распределения концентрации плазмы и электрического поля, а также импульсы тока убегающих электронов и их спектральные распределения с учётом ослабления в металлических фольгах. Впервые показано, что поток убегающих электронов в газовом разряде высокого давления естественным образом формируется за счёт экстракции (по импульсам) в сильном электрическом поле и последующего непрерывного ускорения электронов из хвоста энергетического спектра плотной плазмы на фронте волны ионизации газа. Электронная эмиссия с катода при таком механизме взаимодействия поля и плазмы в разрядах высокого давления не является главным фактором образования пучка убегающих электронов;
7. Впервые предложена полностью кинетическая модель электрического разряда высокого давления, в которой электронная составляющая рассматривалась единым образом на основании решения уравнения Больцмана. Сформулированная полностью кинетическая модель позволила уточнить физические характеристики пучков убегающих электронов, получаемых в рамках гибридной модели для одномерной и одномерно-осесимметричной конфигураций. В частности, уточнению подверглись параметры длительности и амплитуды тока пучка, а также энергетический спектр электронов после прохождения ими порога отсечки металлического фильтра. На базе кинетического подхода впервые самосогласованным расчётом продемонстрирована определяющая роль убегающих электронов в процессе наработки объёмной плазмы в разрядах с резко неоднородной начальной ионизацией промежутка. Доказано, что в коаксиальной одномерной задаче именно убегающие электроны обеспечивают быстрое заполнение плазмой межэлектродного пространства и формирование группы электронов с “аномально высокими энергиями”. Также полностью кинетическая модель позволяет точно указать границы применимости гибридного подхода;
8. Был проведён анализ электродинамического механизма ускорения единичного электрона бегущим доменом продольного электрического поля, который выявил необходимые и достаточные условия его реализации применительно к электронам в

газовом разряде с неоднородной геометрией диода. Была показана принципиальная возможность ускорения единичного электрона до кинетических энергий, многократно превосходящих значение максимального приложенного к диоду напряжения  $U_{max}$ , умноженному на элементарный заряд  $q$ . Полностью кинетическая модель непрерывного ускорения электронов в газовом разряде с коаксиальной геометрией подробно демонстрирует появление электронов с такими “аномально высокими энергиями”. Она также позволяет оценить “степень аномальности” (отношение максимальной энергии электронов в пучке к величине  $qU_{max}$ ), которая не превышает 150 %.

Таким образом, все задачи, поставленные в рамках данной работы выполнены и результаты исследований по тематике диссертационной работы изложены в следующих научных публикациях: [58–121].

# Литература

1. *Wilson, C.T.R.* The Acceleration of beta-particles in Strong Electric Fields such as those of Thunderclouds. / C.T.R. Wilson // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 1925. — Vol. 22. — Pp. 534–538.
2. *Frankel, S.* Observation of X-rays from spark discharges in a spark chamber / S. Frankel, V. Highland, T. Sloan, O. van Dyck, W. Wales // *Nuclear Instruments and Methods*. — 1966. — Vol. 44, no. 2. — Pp. 345–348.
3. *Станкевич, Ю.Л.* Быстрые электроны и рентгеновское излучение в начальной стадии развития разряда. / Ю.Л. Станкевич, В.Г. Калинин // *ДАН СССР*. — 1967. — Т. 177, № 1. — С. 72–73.
4. *Noggle, R.C.* A Search for X Rays from Helium and Air Discharges at Atmospheric Pressure / R.C. Noggle, E.P. Krider, J.R. Wayland // *Journal of Applied Physics*. — 1968. — Vol. 39, no. 10. — Pp. 4746–4748.
5. *Тарасова, Л.В.* Исследование рентгеновского излучения из газового разряда в высоких электрических полях / Л.В. Тарасова, Л.Н. Худякова // *Журнал технической физики*. — 1969. — Т. 39, № 8. — С. 1530–1533.
6. *Тарасова, Л.В.* Быстрые электроны и рентгеновское излучение наносекундных импульсных разрядов в газах при давлениях 0.1-760 Тор / Л.В. Тарасова, Л.Н. Худякова, Т.В. Лойко // *Журнал технической физики*. — 1974. — Т. 44, № 3. — С. 564–568.
7. *Бойченко, А.М.* Коэффициент Таунсенда и убегание электронов в электроотрицательном газе / А.М. Бойченко, А.Н. Ткачѐв, С.И. Яковленко // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2003. — Т. 78, № 1. — С. 1223–1227.
8. *Ткачѐв, А.Н.* Механизм убегания электронов в газе и критерий зажигания самостоятельного разряда / А.Н. Ткачѐв, С.И. Яковленко // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2003. — Т. 77, № 5. — С. 264–269.

9. *Алексеев, С.Б.* Пучок электронов, сформированный в газонаполненном диоде при атмосферном давлении воздуха и азота / С.Б. Алексеев, В.М. Орловский, В.Ф. Тарасенко // *Письма в Журнал технической физики*. — 2003. — Т. 29, № 10. — С. 29–35.
10. *Alekseev, S.B.* Measuring the Parameters of an Electron Beam / S.B. Alekseev, V.P. Gubanov, V.M. Orlovskii, A.S. Stepchenko, V.F. Tarasenko // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2003. — Vol. 46, no. 4. — Pp. 505–507.
11. *Тарасенко, В.Ф.* Механизм убегания электронов в плотных газах и формирование мощных субнаносекундных электронных пучков / В.Ф. Тарасенко, С.И. Яковенко // *Успехи физических наук*. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 953–971.
12. *Tarasenko, V.F.* Supershort electron beam from air filled diode at atmospheric pressure / V.F. Tarasenko, S.A. Shunailov, V.G. Shpak, I.D. Kostyrya // *Laser and Particle Beams*. — 2005. — Vol. 23, no. 04. — Pp. 545–551.
13. *Mesyats, G.A.* Dynamics of subnanosecond electron beam formation in gas-filled and vacuum diodes / G.A. Mesyats, S.D. Korovin, K.A. Sharypov, V.G. Shpak, S.A. Shunailov, M.I. Yalandin // *Technical Physics Letters*. — 2006. — Vol. 32, no. 1. — Pp. 18–22.
14. *Chaparro, J.E.* Breakdown Delay Times for Subnanosecond Gas Discharges at Pressures Below One Atmosphere / J.E. Chaparro, W. Justis, H.G. Krompholz, L.L. Hatfield, A.A. Neuber // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2008. — oct. — Vol. 36, no. 5. — Pp. 2505–2511.
15. *Tarasenko, V.F.* Generation of supershort avalanche electron beams and formation of diffuse discharges in different gases at high pressure / V.F. Tarasenko, E.Kh. Baksht, A.G. Burachenko, I.D. Kostyrya, M.I. Lomaev, D.V. Rybka // *Plasma Devices and Operations*. — 2008. — Vol. 16, no. 4. — Pp. 267–298.
16. *Репин, П.Б.* Пространственно-временные параметры рентгеновского излучения диффузного атмосферного разряда / П.Б. Репин, А.Г. Репьев // *Журнал технической физики*. — 2008. — Т. 78, № 1. — С. 78–85.
17. *Dwyer, J.R.* A study of X-ray emission from laboratory sparks in air at atmospheric pressure / J.R. Dwyer, Z. Saleh, H.K. Rassoul, D. Concha, M. Rahman, V. Cooray, J. Jerauld, M.A. Uman, V.A. Rakov // *Journal of Geophysical Research*. — 2008. — Vol. 113, no. D23.
18. *Mesyats, G.A.* Picosecond-controlled switching of high-voltage gas discharge / G.A. Mesyats, K.A. Sharypov, V.G. Shpak, S.A. Shunailov, M.I. Yalandin // *Technical Physics Letters*. — 2008. — Vol. 34, no. 10. — Pp. 818–821.

19. *Karelin, V.I.* High-energy electrons in nanosecond high-voltage discharges developing in the regime of microstructured current channels / V.I. Karelin, A.A. Tren'kin // *Technical Physics Letters*. — 2009. — Vol. 35, no. 5. — Pp. 407–409.
20. *Nguyen, C.V.* X-ray emission in streamer-corona plasma / C.V. Nguyen, A.P.J. van Deursen, E.J.M. van Heesch, G.J.J. Winands, A.J.M. Pemen // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2009. — Vol. 43, no. 2. — P. 025202.
21. *Tarasenko, V.F.* X-ray and runaway electron generation in repetitive pulsed discharges in atmospheric pressure air with a point-to-plane gap / V.F. Tarasenko, Y.V. Shut'ko // *Physics of Plasmas*. — 2011. — Vol. 18, no. 5. — P. 053502.
22. *Kostyrya, I.D.* The amplitude and current pulse duration of a supershort avalanche electron beam in air at atmospheric pressure / I.D. Kostyrya, D.V. Rybka, V.F. Tarasenko // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2012. — Vol. 55, no. 1. — Pp. 72–77.
23. *Месяц, Г.А.* Пикосекундные пучки убегающих электронов в воздухе / Г.А. Месяц, М.И. Яландин, А.Г. Реутова, К.А. Шарыпов, В.Г. Шпак, С.А. Шунайлов // *Физика плазмы*. — 2012. — Т. 38, № 1. — С. 34–51.
24. *Baksht, E.Kh.* Pulse-periodic generation of supershort avalanche electron beams and X-ray emission / E.Kh. Baksht, A.G. Burachenko, M.V. Erofeev, V.F. Tarasenko // *Plasma Physics Reports*. — 2014. — Vol. 40, no. 5. — Pp. 404–411.
25. *Mesyats, G.A.* Generation of high-power subnanosecond pulses / G.A. Mesyats, S.N. Rukin, V.G. Shpak, M.I. Yalandin // *Ultra- Wideband Short-Pulse Electromagnetics 4 (IEEE Cat. No.98EX112)*. — Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1999.
26. *Yalandin, M.I.* Compact High-Power Subnanosecond Repetitive-Pulse Generators (Review) / M.I. Yalandin, V.G. Shpak // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2001. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 285–310.
27. *Lyubutin, S.K.* Generation of High-Voltage Subnanosecond Pulses with a Peak Power of 700 MW and Repetition Frequency of Up to 3.5 kHz / S.K. Lyubutin, G.A. Mesyats, S.N. Rukin, B.G. Slovikovskii, M.R. Ulmaskulov, V.G. Shpak, S.A. Shunailov, M.I. Yalandin // *Instruments and Experimental Techniques*. — 2001. — Vol. 44, no. 5. — Pp. 644–652.
28. *Cho, C.* Calibration of Time-Interleaved Errors in Digital Real-Time Oscilloscopes / C. Cho, J.G. Lee, P.D. Hale, J.A. Jargon, P. Jeavons, J.B. Schlager, A. Dienstfrey // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. — 2016. — Vol. 64, no. 11. — Pp. 4071–4079.

29. *Humphreys, D.A.* Calibration of wideband digital real-time oscilloscopes / D.A. Humphreys, M. Hudlicka, I. Fatadin // 29th Conference on Precision Electromagnetic Measurements (CPEM 2014). — IEEE, 2014.
30. *Рыбка, Д.В.* Временная структура пучка убегающих электронов, генерируемого в воздухе атмосферного давления / Д.В. Рыбка, В.Ф. Тарасенко, А.Г. Бураченко, Е.В. Балзовский // *Письма в Журнал технической физики*. — 2012. — Т. 38, № 14. — С. 32–40.
31. *Бабич, Л.П.* Численное моделирование наносекундного разряда в гелии при атмосферном давлении, развивающегося в режиме убегания электронов / Л.П. Бабич, И.М. Куцык // *Теплофизика высоких температур*. — 1995. — Т. 33, № 2. — С. 191–199.
32. *Babich, L.P.* Analysis of a new electron-runaway mechanism and record-high runaway-electron currents achieved in dense-gas discharges / L.P. Babich // *Physics-Uspekhi*. — 2005. — Vol. 48, no. 10. — Pp. 1015–1037.
33. *Babich, L.P.* High-Energy Phenomena in Electric Discharges in Dense Gases / L.P. Babich. — Arlington, VA: Futurepast, 2003. — 365 pp.
34. *Birdsall, C.K.* Plasma Physics via Computer Simulation / C.K. Birdsall, A.B. Langdon. — Plasma Physics Series, Philadelphia, PA: Institute of Physics Publishing, 1991. — 469 pp.
35. *Hockney, R.W.* Computer Simulation Using Particles / R.W. Hockney, J.W. Eastwood. — New York, USA: Taylor & Francis Group, LLC, 1988. — 540 pp.
36. *Zeng, L.* Runaway electron generation during disruptions in the J-TEXT tokamak / L. Zeng, Z.Y. Chen, Y.B. Dong, H.R. Koslowski, Y. Liang, Y.P. Zhang, H.D. Zhuang, D.W. Huang, X. Gao // *Nuclear Fusion*. — 2017. — feb. — Vol. 57, no. 4. — P. 046001.
37. *Carbajal, L.* Space dependent, full orbit effects on runaway electron dynamics in tokamak plasmas / L. Carbajal, D. del Castillo-Negrete, D. Spong, S. Seal, L. Baylor // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24, no. 4. — P. 042512.
38. *Zhou, R.J.* Runaway electrons generated during spontaneous disruptions in the EAST tokamak / R.J. Zhou, L.Q. Hu, Y. Zhang, G.Q. Zhong, S.Y. Lin // *Nuclear Fusion*. — 2017. — Vol. 57, no. 11. — P. 114002.
39. *Xiao, M.* Analysis of synchrotron radiation spectra of runaway electrons in Tokamak / M. Xiao, R.J. Zhou, L.Q. Hu, Y.K. Zhang // *Physics of Plasmas*. — 2017. — Vol. 24, no. 12. — P. 124504.

40. *Aleynikov, P.* Generation of runaway electrons during the thermal quench in tokamaks / P. Aleynikov, B.N. Breizman // *Nuclear Fusion*. — 2017. — Vol. 57, no. 4. — P. 046009.
41. *Boozer, A.H.* Runaway electrons and ITER / A.H. Boozer // *Nuclear Fusion*. — 2017. — Vol. 57, no. 5. — P. 056018.
42. *Chilingarian, A.* Comments on the models based on the concept of runaway electrons for explaining high-energy phenomena in the terrestrial atmosphere / A. Chilingarian // *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics*. — 2017. — Vol. 81, no. 2. — Pp. 234–237.
43. *Dwyer, J.R.* Characterizing the source properties of terrestrial gamma ray flashes / J.R. Dwyer, N. Liu, J.E. Grove, H. Rassoul, D.M. Smith // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2017. — Vol. 122, no. 8. — Pp. 8915–8932.
44. *Dwyer, J.R.* Diffusion of relativistic runaway electrons and implications for lightning initiation / J.R. Dwyer // *Journal of Geophysical Research: Space Physics*. — 2010. — Vol. 115, no. A3. — Pp. 1–11.
45. *Dwyer, J.R.* Estimation of the fluence of high-energy electron bursts produced by thunderclouds and the resulting radiation doses received in aircraft / J.R. Dwyer, D.M. Smith, M.A. Uman, Z. Saleh, B. Grefenstette, B. Hazelton, H.K. Rassoul // *Journal of Geophysical Research*. — 2010. — Vol. 115, no. D9.
46. *Apollonov, V.V.* Runaway electron beams for pumping UV-range gas lasers / V.V. Apollonov, V.A. Yamschikov // *Advanced High-Power Lasers* / Ed. by Marek Osinski, Howard T. Powell, Koichi Toyoda. — SPIE, 2000.
47. *Панченко, А.Н.* Импульсные газовые лазеры с накачкой разрядом, формируемым убегающими электронами / А.Н. Панченко, В.Ф. Тарасенко, Н.А. Панченко // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2017. — Т. 60, № 8. — С. 36–39.
48. *Yakovlenko, S.I.* Escaping electrons and discharges based on the background-electron multiplication wave for the pumping of lasers and lamps / S.I. Yakovlenko // *Laser Physics*. — 2006. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 403–426.
49. *Tarasenko, V.F.* Pumping of lasers and lamps by discharges based on the background-electron multiplication waves / V.F. Tarasenko, S.I. Yakovlenko, A.M. Boichenko, I.D. Kostyrya, M.I. Lomaev, A.N. Tkachev // *Physics of Wave Phenomena*. — 2008. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 180–198.



50. *Бакшт, Е.Х.* Импульсная катодолюминесценция алмаза, кальцита, сподумена и флюорита под воздействием электронного пучка субнаносекундной длительности / Е.Х. Бакшт, А.Г. Бураченко, В.Ф. Тарасенко // *Письма в Журнал технической физики*. — 2010. — Т. 36, № 21. — С. 102–110.
51. *Babich, L.P.* Luminescence From Minerals Excited by Subnanosecond Pulses of Runaway Electrons Generated in an Atmospheric-Pressure High-Voltage Discharge in Air / L.P. Babich, K.H. Becker, T.V. Loiko // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2009. — Vol. 37, no. 11. — Pp. 2261–2264.
52. *Lipatov, E.I.* Pulsed Cathodoluminescence of Natural and Synthetic Diamonds Excited by Nanosecond and Subnanosecond Electron Beams / E.I. Lipatov, V.M. Lisitsyn, V.I. Oleshko, E.F. Polisadova, V.F. Tarasenko, E.H. Baksht // *Cathodoluminescence*. — InTech, 2012.
53. *Roussel-Dupré, R.A.* Kinetic theory of runaway air breakdown / R.A. Roussel-Dupré, A.V. Gurevich, T. Tunnell, G.M. Milikh // *Physical Review E*. — 1994. — Vol. 49, no. 3. — Pp. 2257–2271.
54. *Gurevich, A.V.* Nonuniform runaway air-breakdown / A.V. Gurevich, G.M. Milikh, R.A. Roussel-Dupre // *Physics Letters A*. — 1994. — Vol. 187, no. 2. — Pp. 197–203.
55. *Гуревич, А.В.* Пробой на убегающих электронах и электрические разряды во время грозы / А.В. Гуревич, К.П. Зыбин // *Успехи физических наук*. — 2001. — Т. 171, № 11. — С. 1177–1199.
56. *Gurevich, A.V.* Amplification and nonlinear modification of runaway breakdown / A.V. Gurevich, K.P. Zybin, Yu.V. Medvedev // *Physics Letters A*. — 2006. — Vol. 349, no. 5. — Pp. 331–339.
57. *Embréus, O.* On the relativistic large-angle electron collision operator for runaway avalanches in plasmas / O. Embréus, A. Stahl, T. Fülöp // *Journal of Plasma Physics*. — 2018. — Vol. 84, no. 01.
58. *Andronnikov, I.V.* Properties of Modulated Millisecond Corona Discharge Generated in Air at Atmospheric Pressure / I.V. Andronnikov, V.Yu. Kozhevnikov, I.D. Kostyrya, D.V. Rybka, V.F. Tarasenko // XI International Conference Atomic and Molecular Pulsed Lasers (AMPL), Tomsk, Russia. — 2013.
59. *Kozyrev, A.V.* Theoretical 1-D model of the formation of a nanosecond high-pressure discharge in a coaxial geometry / A.V. Kozyrev, V.Yu. Kozhevnikov, N.M. Dmitrieva // XI

- International Conference Atomic and Molecular Pulsed Lasers (AMPL), Tomsk, Russia. — 2013.
60. *Kozhevnikov, V.Yu.* Simulation of Initial Stage of Nanosecond Volume High Pressure Gas Discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semenyuk // 26th Symposium on Plasma Physics and Technology, Prague, Czech Republic. — 2014.
  61. *Kozyrev, A.V.* Simulation of high pressure nanosecond gas discharge in coaxial gap / A.V. Kozyrev, V.Yu. Kozhevnikov, N.M. Dmitrieva // International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects, Tomsk, Russia. — 2014.
  62. *Kozhevnikov, V.Y.* Deterministic modelling of the runaway electron beams formation in high-pressure nanosecond gas discharges / V.Y. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk, A.O. Kokovin // 6th International Congress Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE 2018), Tomsk, Russia. — 2018.
  63. *Kozhevnikov, V.Yu.* Hybrid model of runaway electrons generation in nanosecond high pressure gas discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // Plasma Sciences (ICOPS), 2015 IEEE International Conference on, Antalya, Turkey. — 2015.
  64. *Kozhevnikov, V.Yu.* Hybrid approach to high-pressure gas discharge simulation / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // 66th Annual Meeting of the Austrian Physical Society, Vienna, Austria. — 2016.
  65. *Tarasenko, V.* Current and spectra of runaway electron beams in  $SF_6$ , nitrogen and air / V. Tarasenko, C.Z. Zhang, A. Kozyrev, E. Baksht, A. Burachenko, T. Shao, M. Lomaev, P. Yan, V. Kozhevnikov, N. Semeniuk // 4th International Congress Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE 2016). — 2016.
  66. *Kozhevnikov, V.Yu.* Phase stabilization effect in nanosecond microwave Gunn oscillators / V.Yu. Kozhevnikov, V.Yu. Konev, A.I. Klimov, V.P. Gubanov, O.B. Kovalchuk, A.V. Kozyrev // Telecommunications Forum (TELFOR), 2013 21st, Belgrade, Serbia. — 2013. — Pp. 697–700.
  67. *Kozhevnikov, V.Yu.* Coherent radiation summation of two X-band nanosecond Gunn oscillators synchronized by a modulating pulse / V.Yu. Kozhevnikov, V.Yu. Konev, A.I. Klimov // Telecommunications Forum (TELFOR), 2015 23st, Belgrade, Serbia. — 2015. — Pp. 536–538.
  68. *Kozhevnikov, V.Yu.* Kinetic Modelling of the One-dimensional Planar Virtual Cathode Oscillator / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // Telecommunications Forum (TELFOR), 2016 24st, Belgrade, Serbia. — 2016. — Pp. 554–557.

69. *Kozhevnikov, V.Yu.* The Electromagnetic Nature of “Anomalous” Runaway Electrons in Fast Gas Discharges / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // Telecommunications Forum (TELFOR), 2017 25st, Belgrade, Serbia. — 2017. — Pp. 399–402.
70. *Kozhevnikov, V.Yu.* Hybrid kinetic-liquid model of high-pressure gas discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // The 19th Conference on Plasma and its Applications, 5 February, Jerusalem, Israel. — 2017.
71. *Kozhevnikov, V.Yu.* Hybrid kinetic-liquid model of high-pressure gas discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // 42nd Conference of the Middle-European Cooperation in Statistical Physics (MECO 42), 8-10 February, Lyon, France. — 2017.
72. *Kozhevnikov, V.Yu.* Hybrid kinetic-liquid model of the nanosecond discharge initiated by runaway electrons / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // Pulsed Power Conference (PPC), 2017 IEEE, Brighton, United Kingdom. — 2017.
73. *Kozhevnikov, V.Yu.* The Physical Nature of Electrons with “Anomalous” Energies in Fast Atmospheric Discharges / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk, E.M. Baranova // 8th Plasma Physics by Laser and Applications Conference, Messina, Italy. — 2017.
74. *Kozhevnikov, V.Y.* The physical nature of electrons with “anomalous” energies in fast atmospheric discharges / V.Y. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk, E.M. Baranova, E.Kh. Baksht, V.F. Tarasenko, M.I. Lomaev, D.A. Sorokin, A.G. Burachenko // Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), 2017 International Conference on, Verona, Italy. — 2017. — Pp. 489–492.
75. *Kozhevnikov, V.* The simulation of stratospheric discharges sustained by the secondary electrons from cosmic rays / V. Kozhevnikov // COSMIC RAYS: the salt of the star formation recipe, 2-4 May, Florence, Italy. — 2018.
76. *Kozhevnikov, V.* Numerical simulation of fast atmospheric pressure discharge in gas diode with plane-grid cathode system / V. Kozhevnikov, A. Kozyrev, N. Semeniuk, A. Kokovin // XI International Conference on Computational Heat, Mass and Momentum Transfer (ICCHMT), 21-24 May, Krakow, Poland. — 2018. — Pp. 283–284.
77. *Kozhevnikov, V.* Simulation of the Subnanosecond Runaway Electron Source for Low-Dose Industrial Radiography / V. Kozhevnikov, A. Kozyrev, A. Kokovin, N. Semeniuk, V. Tarasenko, E. Baksht, M. Lomaev, A. Burachenko, D. Sorokin, D. Beloplotov // 2018 International Conference of Electrical and Electronic Technologies for Automotive, Milan, Italy. — 2018.

78. *Kozhevnikov, V.* Hybrid Numerical Simulation of the Nanosecond Discharge in Gas-Filled Diode with Plane-Grid Cathode / V. Kozhevnikov, A. Kozyrev, N. Semeniuk, A. Kokovin // 2018 28th International Symposium on Discharges and Electrical Insulation in Vacuum (ISDEIV), Greifswald, Germany. — IEEE, 2018. — Pp. 483–486.
79. *Kokovin, A.* Theoretical Modelling of Fast Atmospheric Pressure Discharge in Gas Diode with Plane-Grid Cathode System / A. Kokovin, N. Semeniuk, V. Kozhevnikov, V. Goliak, A. Kozyrev // 2018 20th International Symposium on High-Current Electronics (ISHCE), Tomsk, Russia. — IEEE, 2018. — Pp. 200–203.
80. Генерация убегающих электронов и рентгеновского излучения в разрядах повышенного давления / А.Л. Александров, Н.А. Ашурбеков, Е.Х. Бакшт, Е.В. Балзовский, С.А. Баренгольц, Д.В. Белоплов, А.М. Бойченко, П.А. Бохан, С.Н. Буранов, А.Г. Бураченко, В.В. Горохов, М.В. Ерофеев, Д.Э. Закревский, С.Н. Иванов, К.О. Иминов, В.И. Карелин, В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, И.Д. Костыря, Е.И. Липатов, В.В. Лисенков, М.И. Ломаев, С.В. Митько, А.С. Насибов, В.И. Орешкин, Е.В. Орешкин, В.М. Орловский, В.Н. Очкин, П.Б. Репин, Д.В. Рыбка, В.В. Рыжов, Н.С. Семенюк (Олейник), В.И. Соломонов, Д.А. Сорокин, В.Ф. Тарасенко, А.Н. Ткачев, А.А. Тренькин, И.В. Швейгерт, В.А. Шкляев, С.И. Яковленко; Под ред. В.Ф. Тарасенко. — ООО “СТТ” (Scientific & Technical Translation), Tomsk, 2015. — 567 с.
81. Generation of Runaway Electron Beams and X-Rays in High Pressure Gases, Volume 2: Processes and Applications / Ed. by V.F. Tarasenko. — Nova Science Publishers, Inc., 2016. — 331 pp.
82. *Кожевников, В.Ю.* Дрейфовая модель прикатодных областей тлеющего разряда / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Ю.Д. Королёв // *Физика плазмы*. — 2006. — Т. 32, № 11. — С. 1027–1038.
83. *Кожевников, В.Ю.* Теория нормального тлеющего разряда повышенного давления / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Ю.Д. Королёв // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2006. — Т. 49, № 2. — С. 71–77.
84. *Кожевников, В.Ю.* Расчет вольтамперной характеристики объемного разряда высокого давления с внешней ионизацией газа / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2007. — Т. 50, № 8. — С. 37–41.
85. *Кожевников, В.Ю.* Вольт-амперная характеристика объемного разряда в газе высокого давления / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев // *Теплофизика высоких температур*. — 2008. — Т. 46, № 4. — С. 625–628.

86. *Baksht, E.H.* Spectrum of fast electrons in a subnanosecond breakdown of air-filled diodes at atmospheric pressure / E.H. Baksht, A.G. Burachenko, V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, I.D. Kostyrya, V.F. Tarasenko // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2010. — Vol. 43, no. 30. — P. 305201.
87. *Козырев, А.В.* Восстановление спектра электронного пучка наносекундной длительности из данных по его ослаблению в тонких фольгах / А.В. Козырев, В.Ю. Кожевников, Е.Х. Бакшт, А.Г. Бураченко, В.Ф. Тарасенко // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2010. — Т. 53, № 4. — С. 33–39.
88. *Shao, T.* Runaway electrons and x-rays from a corona discharge in atmospheric pressure air / T. Shao, V.F. Tarasenko, C. Zhang, D.V. Rybka, I.D. Kostyrya, A.V. Kozyrev, P. Yan, V.Yu. Kozhevnikov // *New Journal of Physics*. — 2011. — Vol. 13, no. 11. — P. 113035.
89. *Козырев, А.В.* Излучение диффузного коронного разряда в воздухе атмосферного давления / А.В. Козырев, В.Ю. Кожевников, И.Д. Костыря, Д.В. Рыбка, В.Ф. Тарасенко, Д.В. Шитц // *Оптика атмосферы и океана*. — 2011. — Т. 24, № 11. — С. 1009–1017.
90. *Конев, В.Ю.* Эффект стабилизации фазы СВЧ-колебаний наносекундных генераторов Ганна / В.Ю. Конев, А.И. Климов, О.Б. Ковальчук, В.П. Губанов, В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Н.А. Торхов // *Письма в Журнал технической физики*. — 2013. — Т. 39, № 21. — С. 45–51.
91. *Рыбка, Д.В.* Коронный разряд в воздухе атмосферного давления при модулированном импульсе напряжения длительностью 10 мс / Д.В. Рыбка, И.В. Андроников, Г.С. Евтушенко, А.В. Козырев, В.Ю. Кожевников, И.Д. Костыря, В.Ф. Тарасенко, М.В. Тригуб, Ю.В. Шутько // *Оптика атмосферы и океана*. — 2013. — Т. 26, № 1. — С. 85–90.
92. *Кожевников, В.Ю.* Численное моделирование процесса формирования газового разряда высокого давления / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Н.С. Семенюк // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2014. — Т. 57, № 3/2. — С. 134–137.
93. *Кожевников, В.Ю.* Теоретическое 0-D-моделирование субнаносекундного газового разряда высокого давления / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Н.М. Дмитриева // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2014. — Т. 57, № 3/2. — С. 130–133.
94. *Kozhevnikov, V.Yu.* Simulation of Initial Stage of Nanosecond Volume High Pressure Gas Discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semenyuk // *Plasma Physics and Technology*. — 2014. — Vol. 1, no. 2. — Pp. 64–66.

95. Рыбка, Д.В. Влияние давления азота на характеристики рентгеновского излучения при переходе от диффузного к коронному разряду / Д.В. Рыбка, А.Г. Бураченко, В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, В.Ф. Тарасенко // *Оптика атмосферы и океана*. — 2014. — Т. 27, № 4. — С. 311–315.
96. Козырев, А.В. Simulation Of High-Pressure Nanosecond Gas Discharge In Coaxial Gap / А.В. Козырев, В.Ю. Кожевников, Н.М. Дмитриева // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2014. — Vol. 57, no. 12/2. — Pp. 59–61.
97. Kozhevnikov, V.Yu. 1D simulation of runaway electrons generation in pulsed high-pressure gas discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2015. — Vol. 112, no. 1. — P. 15001.
98. Kozyrev, A.V. Reconstruction of electron beam energy spectra for vacuum and gas diodes / A.V. Kozyrev, V.Yu. Kozhevnikov, M.S. Vorobyov, E.Kh. Baksht, A.G. Burachenko, N.N. Koval, V.F. Tarasenko // *Laser and Particle Beams*. — 2015. — Vol. 33, no. 02. — Pp. 183–192.
99. Конев, В.Ю. Стабилизация фазы СВЧ-колебаний наносекундной длительности в генераторе на диоде Ганна / В.Ю. Конев, А.И. Климов, О.Б. Ковальчук, В.П. Губанов, В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев // *Журнал технической физики*. — 2015. — Т. 85, № 3. — С. 103–109.
100. Kozyrev, A.V. Zero-Dimensional Theoretical Model of Subnanosecond High-Pressure Gas Discharge / A.V. Kozyrev, V.Yu. Kozhevnikov, N.S. Semeniuk // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2015. — Vol. 43, no. 12. — Pp. 4077–4080.
101. Kozyrev, A.V. Theoretical Simulation of a Gas Breakdown Initiated by External Plasma Source in the Gap With Combined Metal-Dielectric Electrodes / A.V. Kozyrev, V.Y. Kozhevnikov, N.S. Semeniuk, L.A. Zyulkova // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2015. — Vol. 43, no. 8. — Pp. 2294–2298.
102. Kozyrev, A. Theoretical simulation of the picosecond runaway-electron beam in coaxial diode filled with  $SF_6$  at atmospheric pressure / A. Kozyrev, V. Kozhevnikov, M. Lomaev, D. Sorokin, N. Semeniuk, V. Tarasenko // *EPL (Europhysics Letters)*. — 2016. — Vol. 114, no. 4. — P. 45001.
103. Kozyrev, A.V. Theoretical simulation of high-voltage discharge with runaway electrons in sulfur hexafluoride at atmospheric pressure / A.V. Kozyrev, V.Yu. Kozhevnikov, N.S. Semeniuk // *Matter and Radiation at Extremes*. — 2016. — Vol. 1, no. 5. — Pp. 264–268.

104. *Tarasenko, V.* Current and spectra of runaway electron beams in SF<sub>6</sub>, nitrogen and air / V. Tarasenko, Ch. Zhang, A. Kozyrev, E. Baksht, A. Burachenko, T. Shao, M. Lomaev, P. Yan, V. Kozhevnikov, N. Semeniuk // *Известия высших учебных заведений. Физика.* — 2016. — Т. 59, № 9/2. — С. 119–122.
105. *Кожевников, В.Ю.* Влияние способа предварительной ионизации газа на параметры пучка убегающих электронов в разрядах высокого давления / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Н.С. Семенюк // *Известия высших учебных заведений. Физика.* — 2016. — Т. 59, № 12. — С. 3–10.
106. *Kozhevnikov, V.Yu.* Modeling of Space Charge Effects in Intense Electron Beams: Kinetic Equation Method Versus PIC Method / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk // *IEEE Transactions on Plasma Science.* — 2017. — Vol. 45, no. 10. — Pp. 2762–2766.
107. *Кожевников, В.Ю.* Физическая кинетика электронов в высоковольтном импульсном разряде высокого давления с цилиндрической геометрией / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Н.С. Семенюк // *Известия высших учебных заведений. Физика.* — 2017. — Т. 60, № 8. — С. 148–158.
108. *Козырев, А.В.* Вариации параметров пучка убегающих электронов в газовом разряде в условиях неоднородной предварительной ионизации / А.В. Козырев, Е.М. Баранова, В.Ю. Кожевников, Н.С. Семенюк // *Письма в Журнал технической физики.* — 2017. — Т. 43, № 17. — С. 56–63.
109. *Tarasenko, V.F.* Influence of electrode spacing and gas pressure on parameters of a runaway electron beam generating during the nanosecond breakdown in SF<sub>6</sub> and nitrogen / V.F. Tarasenko, C. Zhang, A.V. Kozyrev, D.A. Sorokin, X. Hou, N.S. Semeniuk, A.G. Burachenko, P. Yan, V.Yu. Kozhevnikov, E.Kh. Baksht, M.I. Lomaev, T. Shao // *High Voltage.* — 2017. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 49–55.
110. *Kozyrev, A.* Why do Electrons with “Anomalous Energies” appear in High-Pressure Gas Discharges? / A. Kozyrev, V. Kozhevnikov, N. Semeniuk // *EPJ Web of Conferences.* — 2018. — Vol. 167. — P. 01005.
111. *Кожевников, В.Ю.* Теория высоковольтного импульсного разряда в газе высокого давления: гидродинамический и кинетический подходы / В.Ю. Кожевников, А.В. Козырев, Н.С. Семенюк, А.О. Коковин // *Известия высших учебных заведений. Физика.* — 2018. — Т. 61, № 4. — С. 3–10.

112. *Kozhevnikov, V.Yu.* Influence of Runaway Electrons on the Formation Time of Nanosecond Discharge / V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.S. Semeniuk, A.O. Kokovin // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2018. — Vol. 46, no. 10. — Pp. 3468–3472.
113. *Kozyrev, A.V.* Spectrum of fast electrons in nanosecond breakdown of air at atmospheric pressure / A.V. Kozyrev, E.H. Baksht, A.G. Burachenko, V.Yu. Kozhevnikov, I.D. Kostyrya, V.F. Tarasenko // 16th International Symposium on High-Current Electronics (16th SHCE), Tomsk, Russia. — 2010. — Pp. 43–46.
114. *Baksht, E.H.* Spectrum of fast electrons in subnanosecond breakdown of air-filled diodes at atmospheric pressure / E.H. Baksht, I.D. Kostyrya, V.F. Tarasenko, A.G. Burachenko, V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev // Power Modulator and High Voltage Conference (IPMHVC), 2010 IEEE International, Atlanta, USA. — 2010. — Pp. 405–408.
115. *Tarasenko, V.F.* Corona discharge in atmospheric pressured air / V.F. Tarasenko, D.V. Rybka, V.Y. Kozhevnikov, I.D. Kostyrya, A.V. Kozyrev // EAPPC2012 — 4th European Asian Pulsed Power Conference / BEAMS2012 — 19th International Conference on High-Power Particle Beams, Karlsruhe, Germany. — 2012.
116. *Tarasenko, V.F.* Energy of runaway electrons in atmospheric pressure air during subnanosecond breakdown / V.F. Tarasenko, E.K. Baksht, A.G. Burachenko, V.Y. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, I.D. Kostyrya // EAPPC2012 — 4th European Asian Pulsed Power Conference / BEAMS2012 — 19th International Conference on High-Power Particle Beams, Karlsruhe, Germany. — 2012.
117. *Tarasenko, V.F.* Radiation of diffuse corona discharge in atmospheric pressured air / V.F. Tarasenko, A.V. Kozyrev, V.Yu. Kozhevnikov, I.D. Kostyrya, D.V. Rybka, D.V. Shitz // Proceedings of the XIX International Conference on Gas Discharges and Their Applications, Tomsk, Russia. — 2012.
118. *Сорокин, Д.А.* Импульсный наносекундный коронный разряд в воздухе атмосферного давления / Д.А. Сорокин, Д.В. Рыбка, Г.С. Евтушенко, В.Ю. Кожевников, И.Д. Костыря, А.В. Козырев, В.Ф. Тарасенко, М.В. Тригуб // Материалы V Всероссийской конференции молодых ученых “Материаловедение, технологии и экология в третьем тысячелетии”, Томск, Россия. — 2012. — С. 34–37.
119. *Kozhevnikov, V.Yu.* Electric breakdown simulation of PCB micro gaps in spacecraft operation conditions / V.Yu. Kozhevnikov // 11th International Conference “Gas Discharge Plasmas and Their Applications”, Tomsk, Russia. — 2013.



120. *Konev, V.Yu.* Microwave oscillation phase stabilization effect of nanosecond gunn oscillators (numerical simulation) / V.Yu. Konev, A.I. Klimov, V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, N.A. Torkhov // *Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo)*, 2013 23rd International Crimean Conference, Sevastopol, Ukraine. — 2013.
121. *Tarasenko, V.F.* The spectra of electron beams produced in air-filled diodes at atmospheric pressure / V.F. Tarasenko, E.Kh. Baksht, A.G. Burachenko, I.D. Kostyrya, V.Yu. Kozhevnikov, A.V. Kozyrev, D.V. Rybka // *Plasma Science (ICOPS)*, 2013 Abstracts IEEE International Conference on, San Francisco, USA. — 2013.
122. *Королёв, Ю.Д.* Физика импульсного пробоя газов / Ю.Д. Королёв, Г.А. Месяц. — М.: Наука, 1991. — 224 с.
123. *Бабич, Л.П.* Высоковольтный наносекундный разряд в плотных газах при больших перенапряжениях, развивающийся в режиме убегания электронов / Л.П. Бабич, Т.В. Лойко, В.А. Цукерман // *Успехи физических наук*. — 1990. — Т. 160, № 7. — С. 49–82.
124. *Василяк, Л.М.* Высокоскоростные волны ионизации при электрическом пробое / Л.М. Василяк, С.В. Костюченко, Н.Н. Кудрявцев, И.В. Филюгин // *Успехи физических наук*. — 1994. — Т. 164, № 3. — С. 263–286.
125. *Осипов, В.В.* Самостоятельный объемный разряд / В.В. Осипов // *Успехи физических наук*. — 2000. — Т. 170, № 3. — С. 225–245.
126. *Fletcher, R.C.* Production and Measurement of Ultra-High Speed Impulses / R.C. Fletcher // *Review of Scientific Instruments*. — 1949. — Vol. 20, no. 12. — Pp. 861–869.
127. *Dreicer, H.* Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. I / H. Dreicer // *Physical Review*. — 1959. — Vol. 115, no. 2. — Pp. 238–249.
128. *Dreicer, H.* Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. II / H. Dreicer // *Physical Review*. — 1960. — Vol. 117, no. 2. — Pp. 329–342.
129. *Ландау, Л.Д.* Теоретическая физика. Том 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1989. — 768 с.
130. *Воробьев, А.А.* Прохождение электронов через вещество / А.А. Воробьев, Б.А. Кононов. — Томск.: Издательство ТГУ, 1966. — 179 с.
131. *Райзер, Ю.П.* Физика газового разряда / Ю.П. Райзер. — Долгопрудный: Интеллект, 2009. — 736 с.

132. Беспалов, В.И. Неоднородность ионизации газоразрядного промежутка электронным пучком / В.И. Беспалов, В.В. Рыжов // *Журнал технической физики*. — 1981. — Т. 51, № 7. — С. 1403–1408.
133. Гуревич, А.В. К теории убегающих электронов / А.В. Гуревич // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 1960. — Т. 39. — С. 1296–1308.
134. Кремнев, В.В. Исследование рентгеновского излучения из газового разряда в высоких электрических полях / В.В. Кремнев, Ю.А. Курбатов // *Журнал технической физики*. — 1972. — Т. 42, № 4. — С. 795–799.
135. Козырев, А.В. Модель непрерывного ускорения электронов в газовом разряде / А.В. Козырев, Ю.Д. Королёв, Г.А. Месяц // Труды 6-й Всесоюзной конференции по физике низкотемпературной плазмы. — Т. 2. — 1983. — С. 228–230.
136. Хаддлстоун, Р. Диагностика плазмы / Р Хаддлстоун, С. Леонард. — М.: Мир, 1967. — 517 с.
137. Janda, M. Imaging of Transient Spark in Atmospheric Air by Fast iCCD Camera / M. Janda, Z. Machala // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2011. — Vol. 39, no. 11. — Pp. 2246–2247.
138. Park, D. Plasma Bullets Propagation Inside of Agarose Tissue Model / D. Park, G. Fridman, A. Fridman, D. Dobrynin // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2013. — Vol. 41, no. 7. — Pp. 1725–1730.
139. Delliou, P. Le. Nanosecond Pulsed Discharge Phenomenology in Micrometer-Sized Radially Confined Air Gap / P. Le Delliou, P. Tardiveau, P. Jeanney, G. Bauville, S. Pasquiers // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2011. — Vol. 39, no. 11. — Pp. 2686–2687.
140. Bergner, A. Investigating the outer-bulb discharge as ignition aid for automotive-HID lamps / A. Bergner, S. Groeger, T. Hoebing, C. Ruhrmann, U. Hechtfisher, G. Tohadse, J. Mentel, P. Awakowicz // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2014. — Vol. 47, no. 35. — P. 355204.
141. Xiong, Q. Advanced Optical Diagnostics of Atmospheric Pressure Plasma / Q. Xiong // *Atmospheric Pressure Plasma - from Diagnostics to Applications*. — IntechOpen, 2019.
142. Тарасенко, В.Ф. Формирование пучка электронов в воздухе при атмосферном давлении / В.Ф. Тарасенко, В.М. Орловский, С.А. Шунайлов // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 94–95.

143. Тарасенко, В.Ф. Субнаносекундные пучки электронов, сформированные в газовом диоде / В.Ф. Тарасенко, В.Г. Шпак, С.А. Шунайлов, М.И. Яландин, В.М. Орловский, С.Б. Алексеев // *Письма в Журнал технической физики*. — 2003. — Т. 29, № 21. — С. 1–6.
144. Тарасенко, В.Ф. Сверхкороткий электронный пучок и объёмный сильноточный разряд в воздухе при атмосферном давлении / В.Ф. Тарасенко, С.Б. Алексеев, В.М. Орловский, В.Г. Шпак, Шунайлов // *Журнал технической физики*. — 2004. — Т. 74, № 8. — С. 30–34.
145. Бакшт, Е.Х. О формировании субнаносекундных импульсов тока пучка большой плотности в газовом диоде при низких давлениях / Е.Х. Бакшт, М.И. Ломаев, Д.В. Рыбка, В.Ф. Тарасенко // *Журнал технической физики*. — 2006. — Т. 32, № 21. — С. 69–75.
146. Месяц, Г.А. Об источнике убегающих электронов в импульсном газовом разряде / Г.А. Месяц // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2007. — Т. 85, № 2. — С. 119–122.
147. Бабич, Л.П. По поводу статьи В.Ф. Тарасенко, И.Д. Костыря «О формировании объёмных наносекундных разрядов, субнаносекундных пучков убегающих электронов и рентгеновского излучения в газах повышенного давления» (Известия Вузов. Физика. № 12. 2005) / Л.П. Бабич // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2007. — Т. 50, № 9. — С. 85–88.
148. Tarasenko, V.F. On formation of subnanosecond electron beams in air under atmospheric pressure / V.F. Tarasenko, V.S. Skakun, I.D. Kostyrya, S.B. Alekseev, V.M. Orlovskii // *Laser and Particle Beams*. — 2004. — Vol. 22, no. 01.
149. Тарасенко, В.Ф. Распределение по энергиям убегающих электронов пучка, генерируемого при наносекундном разряде в воздухе атмосферного давления / В.Ф. Тарасенко, Е.Х. Бакшт, А.Г. Бураченко, И.Д. Костыря, М.И. Ломаев, В.К. Петин, Д.В. Рыбка, С.В. Шляхтун // *Физика плазмы*. — 2008. — Т. 34, № 12. — С. 1110–1119.
150. Тарасенко, В.Ф. Сверхкороткий электронный пучок и объёмный сильноточный разряд в воздухе при атмосферном давлении / В.Ф. Тарасенко, С.Б. Алексеев, В.М. Орловский, В.Г. Шпак, Шунайлов // *Журнал технической физики*. — 2009. — Т. 79, № 1. — С. 51–59.
151. Афонский, А.А. Электронные измерения в нанотехнологиях и микроэлектронике / А.А. Афонский, В.П. Дьяконов. — М.: ДМК, 2011. — 688 с.

152. Котельников, В.А. О пропускной способности “эффира” и проволоки в электросвязи / В.А. Котельников // *Успехи физических наук*. — 2006. — Т. 176, № 5. — С. 762–770.
153. Tabata, T. A generalized empirical equation for the transmission coefficient of electrons / T. Tabata, R. Ito // *Nuclear Instruments and Methods*. — 1975. — Vol. 127, no. 3. — Pp. 429–434.
154. Tabata, T. Generalized semiempirical equations for the extrapolated range of electrons / T. Tabata, R. Ito, S. Okabe // *Nuclear Instruments and Methods*. — 1972. — Vol. 103, no. 1. — Pp. 85–91.
155. Тарасенко, В.Ф. О распределении по энергиям электронов пучка при объемном наносекундном разряде в воздухе атмосферного давления / В.Ф. Тарасенко, И.Д. Костыря, В.К. Петин, С.В. Шляхтун // *Журнал технической физики*. — 2006. — Т. 76, № 12. — С. 37–46.
156. Хора, Х. Физика лазерной плазмы / Х. Хора. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 272 с.
157. Valeo, E.J. Solitons and Resonant Absorption / E.J. Valeo, W.L. Kruer // *Physical Review Letters*. — 1974. — Vol. 33, no. 13. — Pp. 750–753.
158. Fortov, V. Complex and Dusty Plasmas / V. Fortov, G. Morfill. — CRC Press, 2009. — 434 pp.
159. Чен, Ф. Введение в физику плазмы / Ф. Чен. — М.: Мир, 1987. — 399 с.
160. Голант, В.Е. Основы физики плазмы / В.Е. Голант, А.П. Жилинский, И.Е. Сахаров. — М.: Атомиздат, 1977. — 384 с.
161. DiCarlo, J.V. Solving the spatially dependent Boltzmann’s equation for the electron-velocity distribution using flux corrected transport / J.V. DiCarlo, M.J. Kushner // *Journal of Applied Physics*. — 1989. — Vol. 66, no. 12. — Pp. 5763–5774.
162. Simon, G. Two-dimensional model of the ignition phase of high-pressure glow discharges / G. Simon, W. Böttcher // *Journal of Applied Physics*. — 1994. — Vol. 76, no. 9. — Pp. 5036–5046.
163. Gill, P. Electron energy distributions in the negative glow and their relevance to hollow cathode lasers / P. Gill, C.E. Webb // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1977. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 299–301.

164. *Boeuf, J.P.* A Monte Carlo analysis of an electron swarm in a nonuniform field: the cathode region of a glow discharge in helium / J.P. Boeuf, E. Marode // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1982. — Vol. 15, no. 11. — Pp. 2169–2187.
165. *Kushner, M.J.* Monte-Carlo simulation of electron properties in RF parallel plate capacitively coupled discharges / M.J. Kushner // *Journal of Applied Physics*. — 1983. — Vol. 54, no. 9. — Pp. 4958–4965.
166. *Winkler, R.* Electron kinetics of weakly ionized collision-dominated RF plasmas in CO / R. Winkler, M. Capitelli, M. Dilonardo, C. Gorse, J. Wilhelm // *Plasma Chemistry and Plasma Processing*. — 1986. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 437–456.
167. *Елецкий, А.В.* Явления переноса в слабоионизованной плазме. / А.В. Елецкий, Л.А. Палкина, Б.М. Смирнов. — М.: Атомиздат, 1975. — 336 с.
168. *Dhali, S.K.* Numerical simulation of streamer propagation in nitrogen at atmospheric pressure / S.K. Dhali, P.F. Williams // *Physical Review A*. — 1985. — Vol. 31, no. 2. — Pp. 1219–1221.
169. *Morrow, R.* Streamer propagation in air / R. Morrow, J.J. Lowke // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1997. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 614–627.
170. *Kulikovsky, A.A.* Positive streamer in a weak field in air: A moving avalanche-to-streamer transition / A.A. Kulikovsky // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 57, no. 6. — Pp. 7066–7074.
171. *Babaeva, N.Yu.* On streamer dynamics in dense media / N.Yu. Babaeva, G.V. Naidis // *Journal of Electrostatics*. — 2001. — Vol. 53, no. 2. — Pp. 123–133.
172. *Aleksandrov, N.L.* The effect of low direct voltage on streamer breakdown in long non-uniform air gaps / N.L. Aleksandrov, E.M. Bazelyan, V.A. Vasil'ev // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2003. — Vol. 36, no. 17. — Pp. 2089–2095.
173. *Morrow, R.* Theory of electrical corona in SF<sub>6</sub> / R. Morrow // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*. — 1996. — Vol. 382, no. 1-2. — Pp. 57–65.
174. *Soria, C.* Plasma chemical and electrical modelling of a negative DC corona in pure oxygen / C. Soria, F. Pontiga, A. Castellanos // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2003. — Vol. 13, no. 1. — Pp. 95–107.

175. *Georghiou, G.E.* Simulation of RF Coronas Using the FE-FCT Method / G.E. Georghiou, A.C. Metaxas // *Journal of Microwave Power and Electromagnetic Energy*. — 2000. — Vol. 35, no. 3. — Pp. 151–164.
176. *Salabas, A.* Two-dimensional fluid modelling of charged particle transport in radio-frequency capacitively coupled discharges / A. Salabas, G. Gousset, L.L. Alves // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2002. — Vol. 11, no. 4. — Pp. 448–465.
177. *Golubovskii, Yu.B.* Modelling of the homogeneous barrier discharge in helium at atmospheric pressure / Yu.B. Golubovskii, V.A. Maiorov, J. Behnke, J.F. Behnke // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2002. — Vol. 36, no. 1. — Pp. 39–49.
178. *Yurgelenas, Y.V.* Development of a Barrier Discharge in Air in Highly Nonhomogeneous Electric Field Caused by the Residual Dielectric Surface Charges / Y.V. Yurgelenas, M.A. Leeva // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2009. — Vol. 37, no. 6. — Pp. 809–815.
179. *Beouf, J.-P.* Pseudospark discharges via computer simulation / J.-P. Beouf, L.C. Pitchford // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 1991. — Vol. 19, no. 2. — Pp. 286–296.
180. *Boeuf, J.P.* Plasma display panels: physics, recent developments and key issues / J.P. Boeuf // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2003. — Vol. 36, no. 6. — Pp. R53–R79.
181. *Oda, A.* One-dimensional modelling of low-frequency and high-pressure Xe barrier discharges for the design of excimer lamps / A. Oda, Y. Sakai, H. Akashi, H. Sugawara // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1999. — Vol. 32, no. 21. — Pp. 2726–2736.
182. *Eichwald, O.* Chemical kinetics with electrical and gas dynamics modelization for NO<sub>x</sub> removal in an air corona discharge / O. Eichwald, N.A. Guntoro, M. Yousfi, M. Benhenni // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2002. — Vol. 35, no. 5. — Pp. 439–450.
183. *Kogelschatz, U.* Dielectric-barrier Discharges: Their History, Discharge Physics, and Industrial Applications / U. Kogelschatz // *Plasma Chemistry and Plasma Processing*. — 2003. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 1–46.
184. *Gogolides, E.* Continuum modeling of radio-frequency glow discharges. I. Theory and results for electropositive and electronegative gases / E. Gogolides, H.H. Sawin // *Journal of Applied Physics*. — 1992. — Vol. 72, no. 9. — Pp. 3971–3987.

185. *Бабич, Л.П.* Групповые уравнения для моментов функции распределения релятивистских электронов в холодном газе нейтральных атомарных частиц во внешнем электрическом поле / Л.П. Бабич, М.Л. Кудрявцева // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 2007. — Т. 131. — С. 808–818.
186. *Бочков, Е.И.* Детерминистические методики численного моделирования лавин убегающих электронов высоких энергий / Е.И. Бочков, Л.П. Бабич // *Журнал экспериментальной и теоретической физики.* — 2011. — Т. 139. — С. 568–578.
187. *Марчук, Г.И.* Методы расчёта ядерных реакторов / Г.И. Марчук. — М.: Атомиздат, 1958. — 383 с.
188. *Абагян, Л.П.* Методы расчёта ядерных реакторов / Л.П. Абагян, Н.О. Базазянц, М.Н. Николаев, А.М. Цибуля. — М.: Энергоиздат, 1981. — 233 с.
189. *Бабич, Л.П.* Особенности регистрации импульсов убегающих электронов высоких энергий и рентгеновского излучения, генерируемых высоковольтными наносекундными разрядами в атмосфере / Л.П. Бабич, Т.В. Лойко // *Физика плазмы.* — 2010. — Т. 36, № 3. — С. 287–294.
190. *Davies, J.R.* How wrong is collisional Monte Carlo modeling of fast electron transport in high-intensity laser-solid interactions? / J.R. Davies // *Physical Review E.* — 2002. — Vol. 65, no. 2.
191. *Рошаль, А.С.* Моделирование заряженных пучков / А.С. Рошаль. — М.: Атомиздат, 1979. — 224 с.
192. *Eastwood, J.W.* The virtual particle EM PIC method for modelling microwave devices / J.W. Eastwood // *IEEE International Conference on Plasma Science.* — IEEE, 1989.
193. *Lihua, Cao.* PIC-MC Code to Model Fast Electron Beam Transport Through Dense Matter / Cao Lihua, Pei Wenbing, Liu Zhanjun, Chang Tieqiang, Li Bin, Zheng Chunyang // *Plasma Science and Technology.* — 2006. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 269–274.
194. *Lihua, Cao.* Three-Dimensional PIC-MC Modeling for Relativistic Electron Beam Transport Through Dense Plasma / Cao Lihua, Chang Tieqiang, Pei Wenbing, Liu Zhanjun, Li Meng, Zheng Chunyang // *Plasma Science and Technology.* — 2008. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 18–21.
195. *Singh, G.* Secondary Virtual-Cathode Formation in a Low-Voltage Vircator: PIC Simulations / G. Singh, S. Chaturvedi // *IEEE Transactions on Plasma Science.* — 2008. — Vol. 36, no. 3. — Pp. 694–700.

196. *Turner, G.R.* A one-dimensional model illustrating virtual-cathode formation in a novel coaxial virtual-cathode oscillator / G.R. Turner // *Physics of Plasmas*. — 2014. — Vol. 21, no. 9. — P. 093104.
197. *Schweigert, I.V.* Mode transition in miniature dc discharge driven by an auxiliary electrode / I.V. Schweigert // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2015. — Vol. 24, no. 3. — P. 034008.
198. *Schweigert, I.V.* Picosecond Breakdown in High-Voltage Open Pulse Discharge With Enhanced Secondary Electron Emission / I.V. Schweigert, A.L. Alexandrov, P.P. Gugin, M.A. Lavrukhin, P.A. Bokhan, D.E. Zakrevsky // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2017. — Vol. 45, no. 12. — Pp. 3202–3208.
199. *Schweigert, I.V.* Effect of secondary electron emission on subnanosecond breakdown in high-voltage pulse discharge / I.V. Schweigert, A.L. Alexandrov, P. Gugin, M. Lavrukhin, P.A. Bokhan, Dm.E. Zakrevsky // *Journal of Physics: Conference Series*. — 2017. — Vol. 927. — P. 012050.
200. *Bera, K.* Plasma Dynamics in Low-Pressure Capacitively Coupled Oxygen Plasma Using PIC–MCC/Fluid Hybrid Model / K. Bera, S. Rauf, K. Collins // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2011. — Vol. 39, no. 11. — Pp. 2576–2577.
201. *Zhongcai, Y.* PIC/MCC Simulation of Glow Discharge Plasma in Four-Anode Device / Y. Zhongcai, S. Jiaming, X. Bo // *Plasma Science and Technology*. — 2007. — Vol. 9, no. 1. — Pp. 62–66.
202. *Schweigert, I.V.* Periodical plasma structures controlled by external magnetic field / I.V. Schweigert, M. Keidar // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2017. — Vol. 26, no. 6. — P. 064001.
203. *Matyash, K.* PIC-MCC Modeling of a Capacitive RF discharge / K. Matyash, R. Schneider // *Contributions to Plasma Physics*. — 2004. — Vol. 44, no. 7-8. — Pp. 589–593.
204. *Schweigert, I.V.* Breakdown in helium in high-voltage open discharge with subnanosecond current front rise / I.V. Schweigert, A.L. Alexandrov, P.A. Bokhan, Dm.E. Zakrevskiy // *Plasma Physics Reports*. — 2016. — Vol. 42, no. 7. — Pp. 666–677.
205. *Teunissen, J.* 3D PIC-MCC simulations of discharge inception around a sharp anode in nitrogen/oxygen mixtures / J. Teunissen, U. Ebert // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2016. — Vol. 25, no. 4. — P. 044005.



206. *Alexandrov, A.L.* Kinetic simulations of argon dusty plasma afterglow including metastable atom kinetics / A.L. Alexandrov, I.V. Schweigert, D.A. Ariskin // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. — 2013. — Vol. 116, no. 4. — Pp. 663–672.
207. *Verboncoeur, J.P.* An object-oriented electromagnetic PIC code / J.P. Verboncoeur, A.B. Langdon, N.T. Gladd // *Computer Physics Communications*. — 1995. — Vol. 87, no. 1-2. — Pp. 199–211.
208. *Derouillat, J.* Smilei: A collaborative, open-source, multi-purpose particle-in-cell code for plasma simulation / J. Derouillat, A. Beck, F. Pérez, T. Vinci, M. Chiaramello, A. Grassi, M. Flé, G. Bouchard, I. Plotnikov, N. Aunai, J. Dargent, C. Riconda, M. Grech // *Computer Physics Communications*. — 2018. — Vol. 222. — Pp. 351–373.
209. *Forest, J.* An Open-Source Spacecraft Plasma Interaction Simulation Code PicUp3D: Tests and Validations / J. Forest, A. Hilgers, B. Thiebault, L. Eliasson, J.-J. Berthelier, H. de Feraudy // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2006. — Vol. 34, no. 5. — Pp. 2103–2113.
210. *Seidel, D.B.* QUICKSILVER—A general tool for electromagnetic PIC simulation / D.B. Seidel, R.S. Coats, W.A. Johnson, M.L. Kiefer, L.P. Mix, M.F. Pasik, T.D. Pointon, J.P. Quintenz, D.J. Riley, C.D. Turner. — AIP, 1997.
211. *Тараканов, В.П.* Теоретический и численный анализ нелинейных задач физики плазмы посредством кода КАРАТ: дис.на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук: 01.04.08 / В.П. Тараканов. — М., 2011. — 264 с.
212. *Woods, A.J.* MAGIC3D electromagnetic FDTD-PIC code dense plasma model benchmark / A.J. Woods, L.D. Ludeking // 2009 IEEE Pulsed Power Conference. — IEEE, 2009.
213. *Ludeking, L.D.* Well Matched Electromagnetic Boundary in FDTD-PIC for Charged Particle Penetration / L.D. Ludeking, A.J. Woods // *The Open Plasma Physics Journal*. — 2010. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 53–59.
214. *Gurevich, A.V.* Runaway electron mechanism of air breakdown and preconditioning during a thunderstorm / A.V. Gurevich, G.M. Milikh, R. Roussel-Dupre // *Physics Letters A*. — 1992. — Vol. 165, no. 5-6. — Pp. 463–468.
215. *Турчин, В.Ф.* Использование методов математической статистики для решения некорректных задач / В.Ф. Турчин, В.П. Козлов, М.С. Малкевич // *Успехи физических наук*. — 1970. — Т. 102, № 3. — С. 345–386.

216. *Полянин, А.Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения. / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. — М.: «Факториал Пресс», 2000. — 384 с.
217. *Hadamard, J.* Sur les Problèmes aux Dérivées Partielles et Leur Signification Physique / J. Hadamard // *Princeton University Bulletin*. — 1902. — Vol. 13. — Pp. 49–52.
218. *Hadamard, J.* Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques : leçons professées à l'Université Yale / J. Hadamard. — Paris: Hermann, 1932. — 542 pp.
219. *Тихонов, А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 285 с.
220. *Курант, Р.* Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 832 с.
221. *Корн, Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1970. — 720 с.
222. *Городецкий, С.Ю.* Нелинейное программирование и многоэкстремальная оптимизация / С.Ю. Городецкий, В.А. Гришагин. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского Университета, 2003. — 258 с.
223. *Гельфанд, И.М.* Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. — Нижний Новгород: Издательство Нижегородского Университета, 1961. — 228 с.
224. *Самарский, А.А.* Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
225. *Худякова, Л.Н.* Жесткая компонента излучения импульсной рентгеновской трубки / Л.Н. Худякова, Е.К. Гутникова, Л.В. Тарасова // *Журнал технической физики*. — 1964. — Т. 34, № 11. — С. 2044–2056.
226. *Бакшт, Е.Х.* Электроны с повышенной энергией в наносекундном электронном пучке вакуумного диода / Е.Х. Бакшт, И.Д. Костыря, Е.И. Липатов, М.И. Ломаев, Д.В. Рыбка, В.Ф. Тарасенко // *Журнал технической физики*. — 2007. — Т. 77, № 4. — С. 98–103.
227. *Месяц, Г.А.* Импульсная энергетика и электроника / Г.А. Месяц. — М.: Наука, 2004. — 704 с.
228. Сильноточные импульсные электронные пучки в технологии / Под ред. Г.А. Месяц. — Новосибирск: Наука, 1983. — 189 с.

229. *Афанасьев, В.Н.* Параметры электронных пучков, генерируемых ускорителями РАДАН-220 и РАДАН-ЭКСПЕРТ / В.Н. Афанасьев, В.Б. Бычков, В.Д. Ларцев, В.П. Пудов, В.И. Соломонов, С.А. Шунайлов, В.В. Генералова, А.А. Громов // *Приборы и техника эксперимента*. — 2005. — № 5. — С. 88–92.
230. *Tarasenko, V.F.* Supershort Avalanche Electron Beams in Discharges in Air and Other Gases at High Pressure / V.F. Tarasenko, E.Kh. Baksht, A.G. Burachenko, I.D. Kostyrya, M.I. Lomaev, D.V. Rybka // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2009. — Vol. 37, no. 6. — Pp. 832–838.
231. *Куликовский, А.Г.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.
232. *Годунов, С.К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики / С.К. Годунов // *Математический сборник*. — 1959. — Т. 47, № 3. — С. 271–306.
233. *Русанов, В.В.* Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями / В.В. Русанов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 1961. — Т. 1, № 2. — С. 267–279.
234. *Елисеев, С.Н.* Модифицированный метод характеристик для расчета двумерных сверхзвуковых течений газа с выделением разрывов / С.Н. Елисеев // *Труды ЦАГИ*. — 1983. — № 2199. — С. 3–36.
235. *Рихтмайер, Р.* Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. — М.: Мир, 1972. — 420 с.
236. *Liu, X.* Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes / X. Liu, S. Osher, T. Chan // *Journal of Computational Physics*. — 1994. — Vol. 115, no. 1. — Pp. 200–212.
237. *Schiesser, W.E.* A Compendium of Partial Differential Equation Models / W.E. Schiesser, G.W. Griffiths. — Cambridge University Press, 2009. — 476 pp.
238. *Curtiss, C.F.* Integration of Stiff Equations / C.F. Curtiss, J.O. Hirschfelder // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1952. — Vol. 38, no. 3. — Pp. 235–243.
239. *Henrici, P.* Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equation / P. Henrici. — John Wiley and Sons, Inc., New York-London, 1962. — 407 pp.

240. *Chung, J.* A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method / J. Chung, G.M. Hulbert // *Journal of Applied Mechanics*. — 1993. — Vol. 60, no. 2. — P. 371.
241. *Courant, R.* Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik / R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy // *Mathematische Annalen*. — 1928. — Vol. 100, no. 1. — Pp. 32–74.
242. *Калиткин, Н.Н.* Вычисление на квазиравномерных сетках / Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Б. В. Рогов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 224 с.
243. *Флетчер, К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей / К. Флетчер. — М.: Мир, 1991. — 504 с.
244. *Patankar, S.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow / S. Patankar. — New York, USA: Taylor & Francis Group, LLC, 1980. — 214 pp.
245. *Manteuffel, T.A.* The numerical solution of second-order boundary value problems on nonuniform meshes / T.A. Manteuffel, A.B. White // *Mathematics of Computation*. — 1986. — Vol. 47, no. 176. — P. 511.
246. *Shampine, L.F.* The MATLAB ODE Suite / L.F. Shampine, M.W. Reichelt // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 1997. — Vol. 18, no. 1. — Pp. 1–22.
247. *de Sterck, H.* Efficiency-based  $h$ - and  $hp$ -refinement strategies for finite element methods / H. de Sterck, T. Manteuffel, S. McCormick, J. Nolting, J. Ruge, L. Tang // *Numerical Linear Algebra with Applications*. — 2008. — Vol. 15, no. 2-3. — Pp. 89–114.
248. *Aftosmis, M.* Multilevel error estimation and adaptive  $h$ -refinement for Cartesian meshes with embedded boundaries / M. Aftosmis, M. Berger // 40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. — American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.
249. *Dong, S.* P-refinement and P-threads / S. Dong, G.E. Karniadakis // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2003. — Vol. 192, no. 19. — Pp. 2191–2201.
250. *Jiang, G.-S.* Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes / G.-S. Jiang, C.-W. Shu // *Journal of Computational Physics*. — 1996. — Vol. 126, no. 1. — Pp. 202–228.
251. *Shu, C.-W.* Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws / C.-W. Shu. — Springer Berlin Heidelberg, 1998. — Pp. 325–432.

252. *Harten, A.* Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III / A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S.R. Chakravarthy // *Journal of Computational Physics*. — 1987. — Vol. 71, no. 2. — Pp. 231–303.
253. *Gottlieb, S.* A Fifth Order Flux Implicit WENO Method / S. Gottlieb, J.S. Mullen, S.J. Ruuth // *Journal of Scientific Computing*. — 2006. — Vol. 27, no. 1-3. — Pp. 271–287.
254. *Levy, D.* Compact Central WENO Schemes for Multidimensional Conservation Laws / D. Levy, G. Puppo, G. Russo // *SIAM Journal on Scientific Computing*. — 2000. — Vol. 22, no. 2. — Pp. 656–672.
255. *Конев, В.Ю.* Фиксация фазы СВЧ-колебаний наносекундных генераторов Ганна трёхсантиметрового диапазона фронтом модулирующего импульса: дис.на соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук: 01.04.04 / В.Ю. Конев. — Томск, 2015. — 126 с.
256. *Rubiola, E.* Phase Noise and Frequency Stability in Oscillators / E. Rubiola. — Cambridge University Press, 2008. — 114 pp.
257. *Ганн, Д.* Эффект Ганна / Д. Ганн // *Успехи физических наук*. — 1966. — Т. 89, № 1. — С. 147–160.
258. *Царапкин, Д.П.* Методы генерирования СВЧ колебаний с минимальным уровнем фазовых шумов: дис. на соиск. уч. ст. докт. тех. наук: 05.12.04 / Д.П. Царапкин. — Москва, 2004. — 413 с.
259. *Шур, М.* Современные приборы на основе арсенида галлия / М. Шур. — М.: Мир, 1991. — 632 с.
260. *Введенский, Ю.В.* Генератор когерентных наносекундных радиоимпульсов / Ю.В. Введенский, А.В. Андриянов, Э.А. Ермилов // *Приборы и техника эксперимента*. — 1975. — № 1. — С. 114–115.
261. *Наливайко, Б.А.* Полупроводниковые приборы. Сверхвысокочастотные диоды: справочник / Б.А. Наливайко, А.С. Берлин, В.Г. Божков, В.В. Вейц, Г.П. Гермогенова, Л.С. Либерман, Г.Л. Приходько, Л.Ф. Сарафанова, Шухостанов А.К.; Под ред. Б.А. Наливайко. — Томск: МГП «РАСКО», 1992. — 223 с.
262. *Веселов, Г.И.* Микроэлектронные устройства СВЧ: учебное пособие для радиотехнических специальностей ВУЗов / Г.И. Веселов. — М.: Высшая школа, 1988. — 280 с.

263. Павлов, Г.П. Границы применимости локально-полевых моделей полупроводниковых приборов / Г.П. Павлов // *Математическое моделирование*. — 1990. — Т. 2, № 3. — С. 55–62.
264. Gray, P.R. Analysis and design of analog integrated circuits / P.R. Gray. — John Wiley and Sons, Inc., New York-London, 2001. — 875 pp.
265. McCumber, D.E. Theory of negative-conductance amplification and of Gunn instabilities in “two-valley” semiconductors / D.E. McCumber, A.G. Chynoweth // *IEEE Transactions on Electron Devices*. — 1966. — Vol. ED-13, no. 1. — Pp. 4–21.
266. Домрачев, С.И. Динамика домена в диоде Ганна в цепи с резистивной нагрузкой / С.И. Домрачев, А.А. Кузнецов // *Журнал технической физики*. — 2001. — Т. 71, № 4. — С. 58–62.
267. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. — М: Мир, 1961. — 618 с.
268. Strang, G. On the Construction and Comparison of Difference Schemes / G. Strang // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. — 1968. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 506–517.
269. Dia, B.O. Commutateurs de certains semi-groupes holomorphes et applications aux directions alternées / B.O. Dia, M. Schatzman // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. — 1996. — Vol. 30, no. 3. — Pp. 343–383.
270. Yoshida, H. Construction of higher order symplectic integrators / H. Yoshida // *Physics Letters A*. — 1990. — Vol. 150, no. 5-7. — Pp. 262–268.
271. Cheng, C.Z. The integration of the vlasov equation in configuration space / C.Z. Cheng, G. Knorr // *Journal of Computational Physics*. — 1976. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 330–351.
272. Nakamura, T. Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov–Poisson equation in phase space / T. Nakamura, T. Yabe // *Computer Physics Communications*. — 1999. — Vol. 120, no. 2-3. — Pp. 122–154.
273. Xiong, T. High order maximum principle preserving semi-Lagrangian finite difference WENO schemes for the Vlasov equation / T. Xiong, J.-M. Qiu, Z. Xu, A. Christlieb // *Journal of Computational Physics*. — 2014. — Vol. 273. — Pp. 618–639.
274. Bhatnagar, P.L. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems / P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook // *Physical Review*. — 1954. — Vol. 94, no. 3. — Pp. 511–525.

275. *Vann, R.G.L.* Fully nonlinear phenomenology of the Berk–Breizman augmentation of the Vlasov–Maxwell system / R.G.L. Vann, R.O. Dendy, G. Rowlands, T.D. Arber, N. d’Ambrumenil // *Physics of Plasmas*. — 2003. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 623–630.
276. *Lesur, M.* Fully nonlinear features of the energetic beam-driven instability / M. Lesur, Y. Idomura, X. Garbet // *Physics of Plasmas*. — 2009. — Vol. 16, no. 9. — P. 092305.
277. *Abramowitz, M.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I.A. Stegun. — National Bureau of Standards, 1972. — 1046 pp.
278. *Child, C.D.* Discharge From Hot CaO / C.D. Child // *Physical Review (Series I)*. — 1911. — Vol. 32, no. 5. — Pp. 492–511.
279. *Langmuir, I.* The Effect of Space Charge and Residual Gases on Thermionic Currents in High Vacuum / I. Langmuir // *Physical Review*. — 1913. — Vol. 2, no. 6. — Pp. 450–486.
280. *Kadish, A.* A Generalization of the Child-Langmuir Relation for One-Dimensional Time-Dependent Diodes / A. Kadish, W. Peter, M.E. Jones // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. — 1985. — Vol. 32, no. 5. — Pp. 2576–2578.
281. *Айрапетов, А.Ш.* Предельный ток в нестационарном плоском диоде / А.Ш. Айрапетов, А.Л. Феоктистов // *Краткие сообщения по физике АН СССР*. — 1990. — Т. 2. — С. 18–20.
282. *Пегель, И.В.* Нестационарные процессы генерации сильнооточных электронных пучков и мощных импульсов электромагнитного излучения: дис. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук: 01.04.04 / И.В. Пегель. — Томск, 2006. — 213 с.
283. *Benford, J.* High Power Microwaves / J. Benford, J.A. Swegle, E. Schamiloglu. — New York, USA: Taylor & Francis Group, LLC, 2007. — 552 pp.
284. *Бурсиан, В.Р.* Об одном частном случае влияния объёмного заряда на прохождение потока электронов в пустоте / В.Р. Бурсиан, В.И. Павлов // *Журнал русского физико-химического общества*. — 1923. — Т. 55, № 1-3. — С. 71–80.
285. *Кузнецов, В.И.* О самосогласованных состояниях плоского вакуумного диода с пучком электронов / В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер // *Журнал технической физики*. — 2013. — Т. 83, № 12. — С. 1–10.
286. *Sullivan, D.J.* High Power Microwave Generation from a Virtual Cathode Oscillator (Vircator) / D.J. Sullivan // *IEEE Transactions on Nuclear Science*. — 1983. — Vol. 30, no. 4. — Pp. 3426–3428.

287. Кузнецов, В.И. Нестационарные режимы диода Бурсиана. Часть 2. Особенности нелинейных колебаний / В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер // *Физика плазмы*. — 2010. — Т. 36, № 3. — С. 258–272.
288. Korovin, S.D. Numerical simulation of efficient 1.5 GHz vircator / S.D. Korovin, I.V. Pegel, S.D. Polevin, V.P. Tarakanov // *Digest of Technical Papers. 11th IEEE International Pulsed Power Conference (Cat. No.97CH36127)*. — IEEE, 1997. — Pp. 736–741.
289. Tarasenko, V.F. Supershort Avalanche Electron Beams and X-rays in Atmospheric-Pressure Air / V.F. Tarasenko, E.Kh. Baksht, A.G. Burachenko, I.D. Kostyrya, M.I. Lomaev, D.V. Rybka // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2010. — Vol. 38, no. 4. — Pp. 741–750.
290. Tarasenko, V.F. Slep-150m and SLEP-150 compact accelerators of supershort avalanche electron beams and X-rays in atmospheric pressure air / V.F. Tarasenko, D.V. Rybka, I.D. Kostyrya, E.Kh. Baksht // *2011 IEEE Pulsed Power Conference*. — IEEE, 2011. — Pp. 1250–1255.
291. Shao, T. Repetitive nanosecond-pulse discharge in a highly nonuniform electric field in atmospheric air: X-ray emission and runaway electron generation / T. Shao, V.F. Tarasenko, C. Zhang, E.Kh. Baksht, P. Yan, Y.V. Shutko // *Laser and Particle Beams*. — 2012. — Vol. 30, no. 03. — Pp. 369–378.
292. Алексеев, С.Б. Спектры рентгеновского излучения и пучка убегających электронов при наносекундном разряде в воздухе атмосферного давления / С.Б. Алексеев, Е.Х. Бакшт, А.М. Бойченко, И.Д. Костыря, В.Ф. Тарасенко, А.Н. Ткачев // *Журнал технической физики*. — 2012. — Т. 82, № 9. — С. 12–18.
293. Tarasenko, V.F. New Features of the Generation of Runaway Electrons in Nanosecond Discharges in Different Gases / V.F. Tarasenko, E.K. Baksht, M.V. Erofeev, I.D. Kostyrya, D.V. Rybka, Y.V. Shutko // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2013. — Vol. 41, no. 10. — Pp. 2931–2940.
294. Tarasenko, V. A comparison between spectra of runaway electron beams in  $SF_6$  and air / V. Tarasenko, E. Baksht // *Physics of Plasmas*. — 2015. — Vol. 22, no. 12. — P. 123516.
295. Тарасенко, В.Ф. Спектр пучка убегających электронов, генерируемых при наносекундном разряде в воздухе атмосферного давления / В.Ф. Тарасенко, Е.Х. Бакшт, А.Г. Бураченко // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2015. — Т. 58, № 12. — С. 31–38.



296. Сорокин, Д.А. Малогабаритная установка на основе газового диода для исследования спектров катодолюминесценции / Д.А. Сорокин, А.Г. Бураченко, В.Ф. Тарасенко, Е.Х. Бакшт, М.И. Ломаев // *Приборы и техника эксперимента*. — 2018. — № 2. — С. 102–107.
297. Morrow, R. The discharge current induced by the motion of charged particles in time-dependent electric fields; Sato's equation extended / R. Morrow, N. Sato // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1999. — Vol. 32, no. 5. — Pp. L20–L22.
298. Pancheshnyi, S. Role of electronegative gas admixtures in streamer start, propagation and branching phenomena / S. Pancheshnyi // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2005. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 645–653.
299. Prichard, H.M. An Estimate of Population Exposures Due to Radon in Public Water Supplies in the Area of Houston, Texas / H.M. Prichard, T.F. Gesell // *Health Physics*. — 1981. — Vol. 41, no. 4. — Pp. 599–606.
300. Ziegler, J.F. Terrestrial cosmic ray intensities / J.F. Ziegler // *IBM Journal of Research and Development*. — 1998. — Vol. 42, no. 1. — Pp. 117–140.
301. Naidis, G.V. Modelling of plasma bullet propagation along a helium jet in ambient air / G.V. Naidis // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2011. — Vol. 44, no. 21. — P. 215203.
302. Arrayás, M. Spontaneous Branching of Anode-Directed Streamers between Planar Electrodes / M. Arrayás, U. Ebert, W. Hundsdorfer // *Physical Review Letters*. — 2002. — Vol. 88, no. 17.
303. Arrayás, M. Mechanism of Branching in Negative Ionization Fronts / M. Arrayás, M.A. Fontelos, J.L. Trueba // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 95, no. 16.
304. Fowler, R.H. Electron Emission in Intense Electric Fields / R.H. Fowler, L. Nordheim // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 1928. — Vol. 119, no. 781. — Pp. 173–181.
305. Lozansky, E.D. Theory of the initial stage of streamer propagation / E.D. Lozansky, O.B. Firsov // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 1973. — Vol. 6, no. 8. — Pp. 976–981.
306. Arrayás, M. Ionization fronts in negative corona discharges / M. Arrayás, M.A. Fontelos, J.L. Trueba // *Physical Review E*. — 2005. — Vol. 71, no. 3.

307. Гохберг, Б.М. Ленинградский Физико-технический институт Академии наук СССР / Б.М. Гохберг // *Успехи физических наук*. — 1940. — Т. 24, № 1. — С. 11–20.
308. Morrow, R. A Survey of the Electron and Ion Transport Properties of SF<sub>6</sub> / R. Morrow // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 1986. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 234–239.
309. Dhali, S.K. Two-dimensional studies of streamers in gases / S.K. Dhali, P.F. Williams // *Journal of Applied Physics*. — 1987. — Vol. 62, no. 12. — Pp. 4696–4707.
310. Dhali, S.K. Numerical simulation of streamers in SF<sub>6</sub> / S.K. Dhali, A.K. Pal // *Journal of Applied Physics*. — 1988. — Vol. 63, no. 5. — Pp. 1355–1362.
311. Markosyan, A.H. Comparing plasma fluid models of different order for 1D streamer ionization fronts / A.H. Markosyan, J. Teunissen, S. Dujko, U. Ebert // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2015. — Vol. 24, no. 6. — P. 065002.
312. Teunissen, J. Simulating streamer discharges in 3D with the parallel adaptive Afivo framework / J. Teunissen, U. Ebert // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2017. — Vol. 50, no. 47. — P. 474001.
313. Komuro, A. Simulation of spatio-temporal variation of OH radical density in atmospheric-pressure streamer discharge / A. Komuro, A. Ando // *Plasma Sources Science and Technology*. — 2017. — Vol. 26, no. 6. — P. 065003.
314. Lehtinen, N.G. X-ray Emissions in a Multiscale Fluid Model of a Streamer Discharge / N.G. Lehtinen, N. Østgaard // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. — 2018. — Vol. 123, no. 13. — Pp. 6935–6953.
315. Sun, A.B. Why isolated streamer discharges hardly exist above the breakdown field in atmospheric air / A.B. Sun, J. Teunissen, U. Ebert // *Geophysical Research Letters*. — 2013. — Vol. 40, no. 10. — Pp. 2417–2422.
316. Березин, Ю.А. Численные модели плазмы и процессы пересоединения / Ю.А. Березин, Г.И. Дудников. — М.: Наука, 1985. — 127 с.
317. Bethe, H. Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie / H. Bethe // *Annalen der Physik*. — 1930. — Vol. 397, no. 3. — Pp. 325–400.
318. Tarasenko, V. F. Note: Measurement of extreme-short current pulse duration of runaway electron beam in atmospheric pressure air / V. F. Tarasenko, D. V. Rybka, A. G. Burachenko, M. I. Lomaev, E. V. Balzovsky // *Review of Scientific Instruments*. — 2012. — Vol. 83, no. 8. — P. 086106.

319. *Levko, D.* Temporal and spatial structure of a runaway electron beam in air at atmospheric pressure / D. Levko, Ya.E. Krasik, V.F. Tarasenko, D.V. Rybka, A.G. Burachenko // *Journal of Applied Physics*. — 2013. — Vol. 113, no. 19. — P. 196101.
320. *Тарасенко, В.Ф.* Амплитудно-временные характеристики сверхкороткого лавинного электронного пучка при субнаносекундном пробое в воздухе и азоте / В.Ф. Тарасенко, Е.Х. Бакшт, Д.В. Белоplotов, А.Г. Бураченко, М.И. Ломаев // *Физика плазмы*. — 2016. — Т. 42, № 4. — С. 376–390.
321. *Zhang, C.* Generation of super-short avalanche electron beams in SF<sub>6</sub> / C. Zhang, V.F. Tarasenko, T. Shao, D.V. Beloplotov, M.I. Lomaev, D.A. Sorokin, P. Yan // *Laser and Particle Beams*. — 2014. — Vol. 32, no. 02. — Pp. 331–341.
322. *Белоplotов, Д.В.* Начальная фаза пробоя промежутка «острие–плоскость», заполненного азотом и SF<sub>6</sub> повышенного давления / Д.В. Белоplotов, М.И. Ломаев, Д.А. Сорокин, В.Ф. Тарасенко // *Оптика атмосферы и океана*. — 2014. — Т. 27, № 4. — С. 316–320.
323. *Бакшт, Е.Х.* Генерация электронного пучка в азоте и гелии при низком напряжении на газовом диоде / Е.Х. Бакшт, А.Г. Бураченко, М.И. Ломаев, Д.В. Рыбка, В.Ф. Тарасенко, Е.А. Хрущ // *Известия высших учебных заведений. Физика*. — 2007. — Т. 50, № 5. — С. 94–96.
324. *Gurevich, A. V.* Observation of the Avalanche of Runaway Electrons in Air in a Strong Electric Field / A. V. Gurevich, G. A. Mesyats, K. P. Zybin, M. I. Yalandin, A. G. Reutova, V. G. Shpak, S. A. Shunailov // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 8.
325. *Гинзбург, В.Л.* Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном поле / В.Л. Гинзбург, А.В. Гуревич // *Успехи физических наук*. — 1960. — Т. 50, № 2. — С. 201–246.
326. *Храпак, А.Г.* Электроны в плотных газах и плазме / А.Г. Храпак, И.Т. Якубов. — М.: Наука, 1981. — 284 с.
327. *Райзер, Ю.П.* Упрощенное кинетическое уравнение для электронов в неоднородных полях произвольной силы и катодный слой тлеющего разряда / Ю.П. Райзер, М.Н. Шнейдер // *Физика плазмы*. — 1989. — Т. 15, № 3. — С. 318–323.
328. *Itikawa, Y.* Cross Sections for Electron Collisions with Nitrogen Molecules / Y. Itikawa // *Journal of Physical and Chemical Reference Data*. — 2006. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 31–53.